

ЛЕКЦИЯ 1.

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Основное содержание курса – кинематика и динамика исполнительных механизмов манипуляционных роботов.

Понятия *кинематики* и *динамики* как научных дисциплин полагаем известными.

Происхождение понятий *исполнительный механизм* и *манипуляционный робот* следующее.

1) Манипуляционный робот (MR) (робот-манипулятор, Robotic Arm, Manipulate System) = **Робот + Манипулятор.**

Робот – машина с человекоподобным поведением, которая частично или полностью выполняет функции человека при его взаимодействии с внешним миром – «Большая Советская Энциклопедия» (Выпускалась с 1926 года по 1990 год).

Робот (чеш. *robot*, от *robo* — «подневольный труд») — автоматическое устройство, предназначенное для осуществления различного рода механических операций, которое действует по заранее заложенной программе - «Википедия».

n2.6 робот (robot): Приводной механизм, программируемый по двум и более осям (4.3), имеющий некоторую степень автономности (2.2), движущийся внутри своей рабочей среды и выполняющий задачи по предназначению – «ГОСТ Р ИСО 8373- 2014. РОБОТЫ И РОБОТОТЕХНИЧЕСКИЕ УСТРОЙСТВА. Термины и определения». Robots and robotic devices. Terms and definitions.)

ПРИМЕЧАНИЕ Стандарт ГОСТ Р ИСО 8373- 2014 идентичен международному стандарту ISO 8373:2012* "Роботы и робототехнические устройства. Словарь" (ISO 8373:2012 "Robots and robotic devices - Vocabulary", IDT).

n2.1 манипулятор (manipulator): Машина, механизм которой обычно состоит из последовательности сегментов. Сегменты могут быть соединены, а могут перемещаться относительно друг друга. Они могут захватывать и (или) перемещать объекты (заготовки или инструменты) с некоторой степенью свободы (4.4) «ГОСТ Р ИСО 8373- 2014».

MR выполняет действия, подобные (в некотором смысле) тем, которые совершает человек при работе рукой (руками).

Аналогия с человеком не всегда полная. Мы будем рассматривать подобие в смысле выполняемых MR действий по захвату, переносу, установке объектов, работе с различными инструментами и приборами т.д., в

том числе, с использованием информационных систем, оценки обстановки, принятия решений и планирования действий по их осуществлению и т.д.

При этом подобие не обязательно будет относиться к объему рабочей зоны и кинематическому подобию рабочих органов (руки человека и манипуляторы МР).

Примеры объектов, которые охватывает изучаемый предмет – это промышленные МР (Кука, Кавасаки, Фанук...), МР для работы в экстремальных средах (МЭМ-10 – радиоактивные среды), МР мобильных робототехнических комплексов (Торнадо - МГТУ), бортовые манипуляторы космических транспортных систем (SRMS – Shuttle, СБМ - Буран) и МР орбитальных космических станций (SSRMS, Dextre, ERA, JEMRMS), манипуляторы подводных аппаратов и др.

Функционально МР состоит из двух основных частей: Манипулятор и СУ манипулятором (СУМ).

Манипулятор («рука МР») – рабочий орган МР – мехатронная система, преобразующая сигналы управления СУМ в механические перемещения рабочего органа манипулятора, а также установленного на манипуляторе оборудования.

Рабочий орган манипулятора – устройство для захватывания и удержания объектов манипулирования (полезных грузов, инструментов и т.д.). Другие названия – схват, захватное устройство манипулятора (ЗУМ), End Effector (EE).

Установленное оборудование (навесное оборудование) – приборы и устройства (светильники, камеры СТЗ, дальномеры силомоментные датчики (СМД) и т.д.), размещенные на манипуляторе.

В составе оборудования, установленного на манипуляторе мы будем выделять **Средства очуствления** – системы технического зрения, датчики сил и моментов взаимодействия с внешней средой, тактильные датчики, ультразвуковые датчики, дальномеры, сканеры.

Средства очуствления служат для контроля работы МР. В современных МР сигналы средств очуствления используются и при управлении МР,

Система управления манипулятором – устройство, формирующее сигналы управления манипулятором в функции от целевых установок (заданий), формируемых человеком-оператором, и информации о состоянии МР и внешней среды.

В составе СУМ – средства человеко-машинного интерфейса.

Манипулятор включает три подсистемы:

Исполнительный механизм манипулятора, рабочий орган – ЗУМ, и систему приводов манипулятора.

Вообще, **механизм** – это совокупность взаимосвязанных твёрдых тел, предназначенная для преобразования входов на одном или нескольких

твёрдых телах в выходы на других твёрдых телах. Механизм совершаёт преобразование движений одних звеньев в движение других звеньев.

Звенья – это твёрдые тела, из которых образуется механизм. При этом имеются в виду как абсолютно твёрдые тела, так и деформируемые и гибкие тела. Звеном может быть одна деталь, либо несколько деталей, соединённых в одну неизменяемую систему.

2. Исполнительный механизм (ИМ) манипулятора (МР) – механизм, преобразующий движение входящих в его состав отдельных звеньев в движение ЗУМ.

РИСУНОК – схематическое изображение ИМ.

Конструктивно ИМ состоит из нескольких тел (звеньев), связанных попарно.

Смежные звенья ИМ образуют *кинематические пары*.

Вообще, *кинематической парой* (сокращенно, парой, в дальнейшем - КП) называют подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев. Всякая кинематическая пара ограничивает *относительное* движение соединяемых звеньев.

Кинематические пары принято классифицировать по числу степеней свободы, которое утрачивают соединяемые тела в относительном движении, при их соединении. В этой связи кинематические пары подразделяют на 5 классов. При этом движение сопряженных парой *k*-го класса тел определяется *6-k* общими координатами.

Отметим, что каждое из тел может образовывать кинематические пары с несколькими телами.

Тогда число степеней свободы в относительном движении двух тел, сопряженных кинематической парой *S*-го класса, равно

$$n = 6-S.$$

Два соприкасающихся тела образуют кинематическую пару 5-го класса, если в относительном движении эти тела имеют 1 степень свободы. Примерами КП 5-го класса служат вращательная (относительное движение тел – вращение вдоль одной оси), поступательная (относительное движение тел – линейное перемещение вдоль одной оси).

В манипуляционных роботах применяются ИМ, включающие, в основном, кинематические пары 5-го класса – вращательные и поступательные. Отметим, что многие кинематические пары более высокого класса можно представить состоящими из нескольких кинематических пар 5-го класса.

Вращательные КП 5-го класса часто называют *шарнирами*.

В робототехнике наряду для обозначения КП 5-го класса часто применяется термин *сочленение (joint)*.

Звено ИМ – отдельное твёрдое тело, входящее в состав ИМ. Исходя из определения звена ИМ как твёрдого тела, следует, что это – фрагмент ИМ,

заключенный между кинематическими парами, образованными соединением этого фрагмента с другими звеньями ИМ.

Англоязычный аналог понятия звено – *body*.

Совокупность звеньев ИМ, связанных в кинематические пары – это **кинематическая цепь ИМ**.

Вообще, **кинематическая цепь (КЦ)** – это система звеньев, образующих между собой кинематические пары.

Кинематические цепи бывают простыми и сложными.

Простой (линейной) кинематической цепью называется такая цепь, у которой каждое звено входит не более чем в две кинематические пары.

Сложной (разветвлённой) КЦ называется цепь, в которой имеется хотя бы одно звено, входящее более чем в две кинематические пары.

КЦ делятся на **разомкнутые и замкнутые**.

Простая разомкнутая КЦ – простая КЦ, у которой есть звенья, входящие только в одну КП.

Простая замкнутая КЦ – простая КЦ, у которой каждое звено входит в две КП.

Сложная разомкнутая КЦ – такая сложная КЦ, в которой имеются звенья, входящие в одну КП.

Сложная замкнутая КЦ – такая сложная КЦ, в которой каждое звено входит, по крайней мере, в две КП.

Пример *простой разомкнутой* КЦ ИМ - манипулятор, перемещающийся в свободном пространстве. Его последнее звено образует кинематическую пару только с одним, предыдущим звеном.

Пример *простой замкнутой* КЦ ИМ – манипулятор, выполняющий контактную операцию. Все звенья МР, включая последнее, входят в состав двух кинематических пар.

Для механизмов используют понятия **кинематической и структурной схем**.

Структурная схема (структура) – условное графическое изображение механизма, схематически отображающее его функционирование, включающее условные изображения звеньев и КП без указания их размеров.

Кинематическая схема – чертеж механизма, отображающий его функционирование, включающий приближенное к реальному изображение конструкции звеньев и КП с указанием их размеров.

В робототехнике понятия кинематической и структурной схем часто отождествляются и применяются для схематического изображения кинематической цепи.

Используя введенные понятия (звено, кинематическая цепь), можно дать определение механизма, опирающееся на его структуру.

Механизм – это структура, в состав которой входит неподвижное звено (стойка) и число степеней свободы которой равно числу обобщённых координат, характеризующих положение цепи относительно стойки.

Движение звеньев механизма рассматривается по отношению к неподвижному звену – стойке.

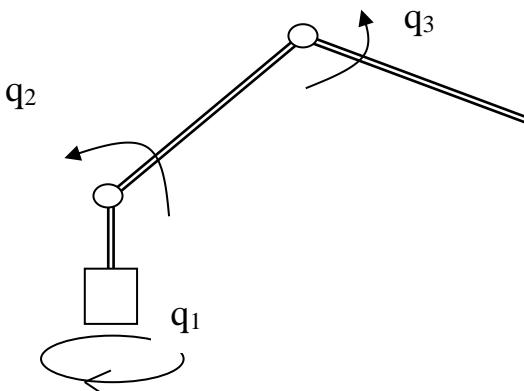
Механизм называется **плоским**, если все его подвижные точки движутся в параллельных плоскостях.

Пространственным называется механизм, подвижные точки которого описывают неплоские траектории или траектории, лежащие на пересекающихся плоскостях.

ИМ МР, как правило, – пространственные механизмы.

Степень свободы – характеристика, определяющая возможность одного независимого перемещения.

Число степеней свободы – число независимых возможных перемещений механической системы.



Пример структурной (кинематической) схемы (ИМ).

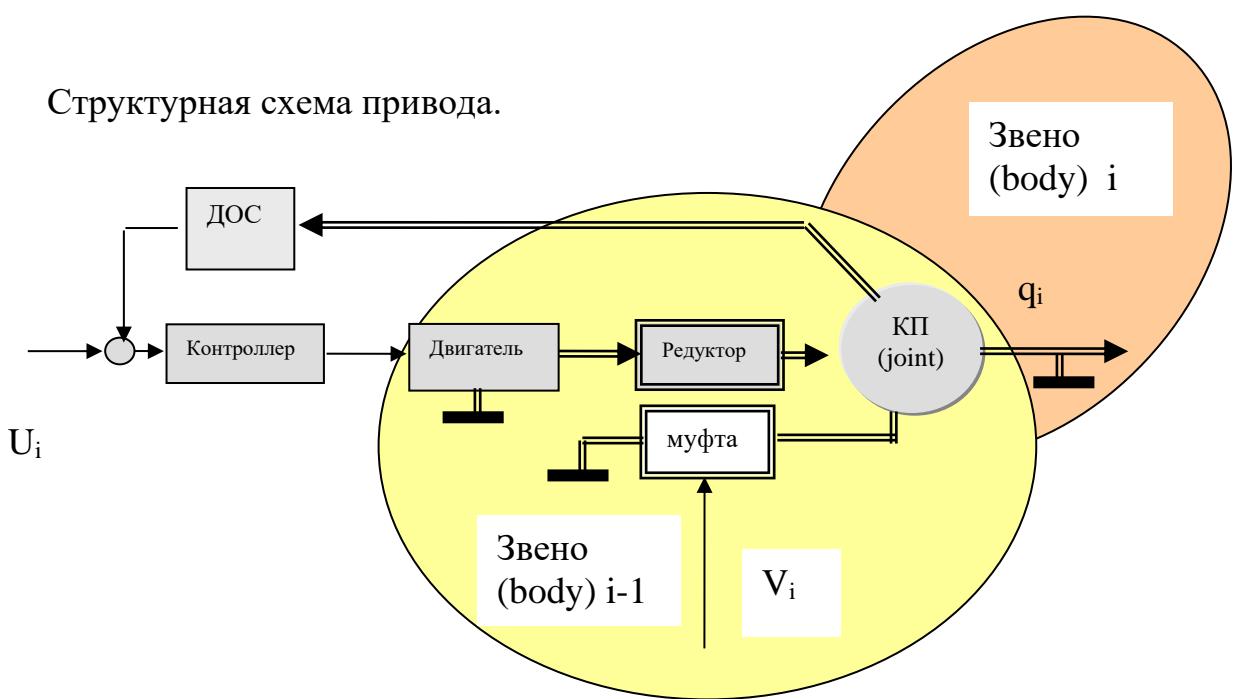
Перемещения отдельных звеньев ИМ осуществляются с помощью **приводов**.

Приводы МР – мехатронные системы.

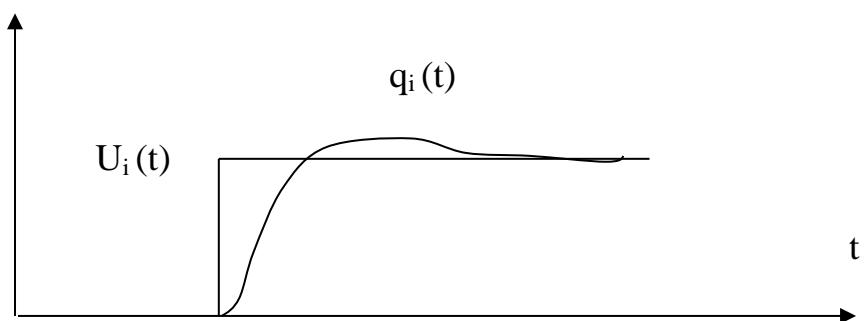
Приводы МР осуществляют преобразование (как правило, электрических) сигналов управления на их (приводов) входах в механические перемещения ИМ и, как следствие, ЗУМ манипулятора.

В составе приводов – (контроллеры, УПУ /силовая электроника/, двигатели, редукторы (МПД)).

Структурная схема привода.



Одинарные стрелки – электрические сигналы. Двойные – механические перемещения.



Функционально приводы манипуляторов чаще всего являются **следящими** (СП), т.е. используют в основе своей работы разности между прикладываемыми извне управляющими воздействиями, соответствующими требуемым значениям выходных координат, и реальными значениями координат, формируемыми на основе показаний датчиков сигналов обратных связей.

Следящие приводы – обязательные компоненты МР для работы в экстремальных средах, МР специального назначения, большинства промышленных роботов.

МР чаще всего устроены так, что один привод осуществляет относительное перемещение только смежных звеньев и только относительно одной оси ИМ (КП кинематически не связаны). Однако есть примеры ИМ, у

которых перемещения отдельных КП взаимосвязаны (дифференциальные механизмы передачи движения).

Суммарные перемещения ИМ происходят в результате работы всех приводов.

Манипулятор в целом осуществляет преобразование с помощью системы приводов сигналы управления на их (приводах) входах в механические перемещения рабочего органа манипулятора; благодаря приводам манипулятор перемещается в пространстве и взаимодействует с объектами.

Сигналы управления на входах приводов формирует система управления манипулятором.

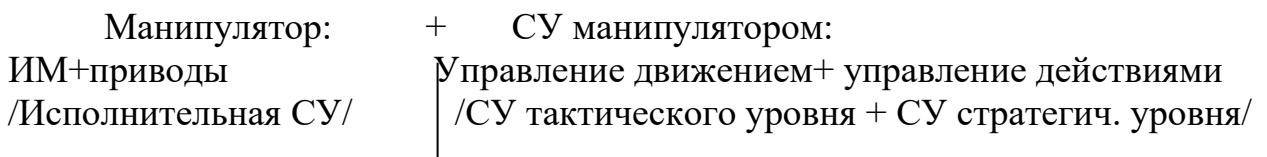
В общем случае СУ манипулятором включает две системы ТСУ и ССУ.

Тактический уровень (СУ тактического уровня - ТСУ) – обеспечивает формирование сигналов управления манипулятором МР; здесь происходит преобразование сигналов управления движением ЗУМ, в сигналы управления приводами. ТСУ часто называют системой управления движением МР.

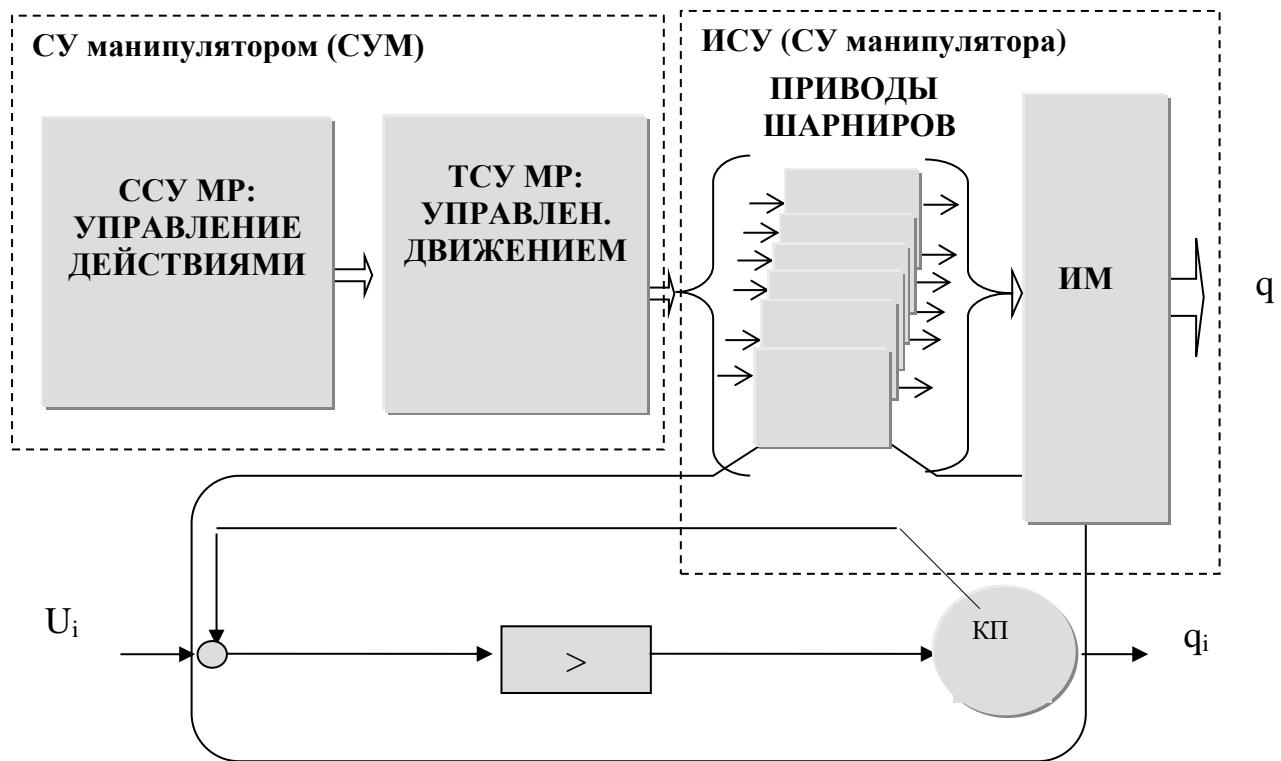
Стратегический уровень (СУ стратегического уровня - ССУ) – обеспечивает функционирование МР соответственно заданных целевых установок. На этом уровне обеспечивается формирование команд управления движением МР в пространстве, которые реализуются в ТСУ. ТСУ часто называют системой управления действиями МР.

Отметим, что манипулятор также имеет систему управления /СУ манипулятора/ = это комплекс средств управления (контроллеры), реализованных непосредственно в приводах шарниров. Для МР в целом СУ манипулятора является *исполнительной системой* - ИСУ. С ее помощью обеспечивается преобразование сигналов управления ТСУ (сигналы управления приводами) – в механические перемещения шарниров и, соответственно – в перемещение манипулятора МР в пространстве.

МАНИПУЛЯЦИОННЫЙ РОБОТ:

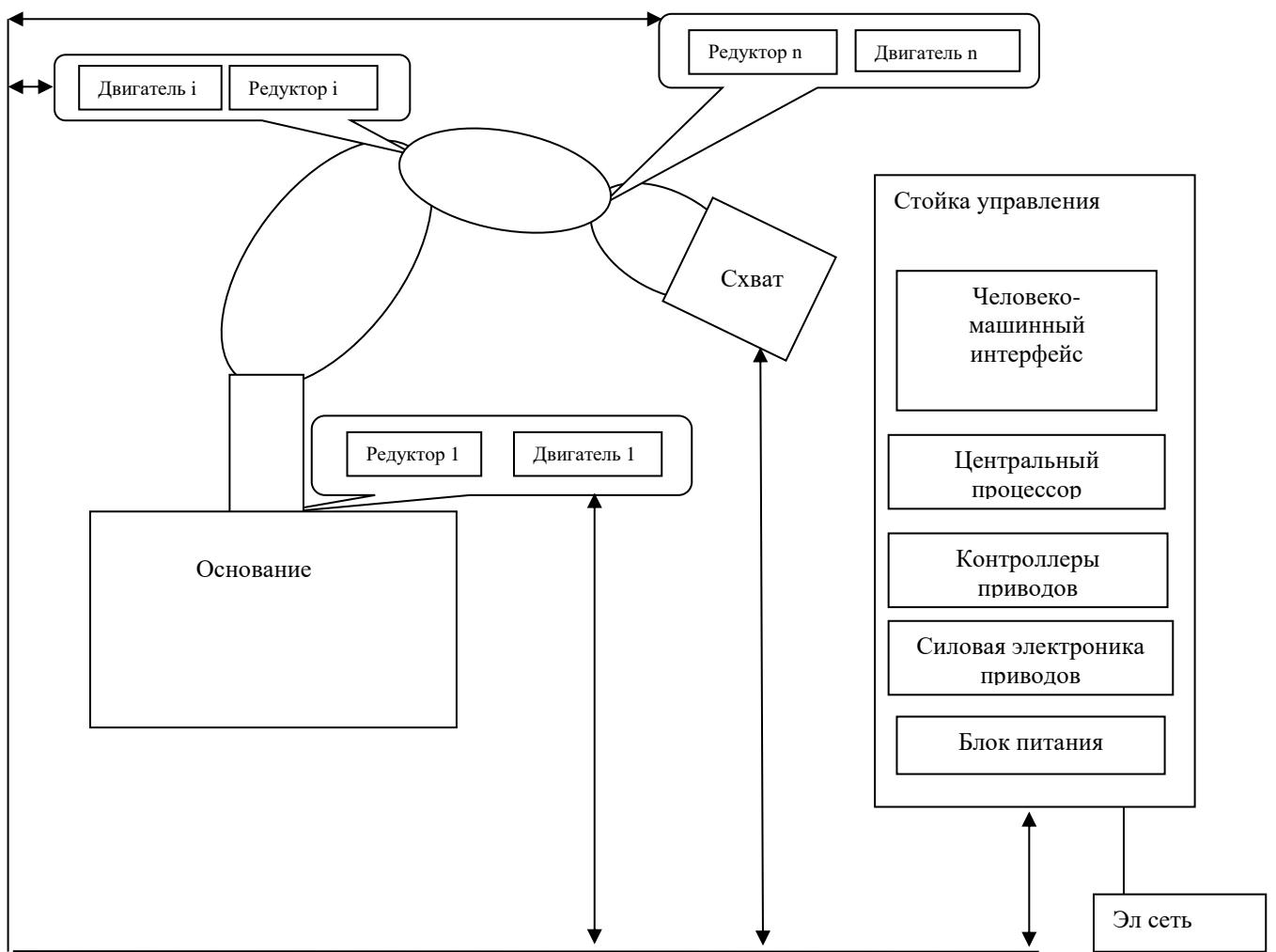


Общее управление МР строится по иерархическому принципу = ССУ – ТСУ – ИСУ. Высшим является ССУ, низшим – исполнительным – ИСУ.



Управление МР на всех уровнях осуществляется с использованием сигналов от датчиков информации (системы технического зрения, силомоментные, тактильные, ультразвуковые и т.д.) и средств человеко-машинного интерфейса.

ПРИМЕР: КМР ERA – ИСУ = ИМ+ЕЕ+система приводов;
ТСУ - управление свободным движением манипулятора, его самонаведение, движение в контакте; **ССУ** – управление действиями (В ERA носят название «Автосеквенции»). В ERA деятельность планируется заранее (Off-line) с помощью специальной системы МРТЕ. Деятельность реализуется в виде последовательности элементарных операций – акций (команд).
 Одна команда – одно действие. Содержание этого действия – элементарное перемещение, или др. операция.



Лекция 2.

РАЗДЕЛ 1. КИНЕМАТИКА ИМ МР

1. Координаты и параметры ИМ

1.1. Описание ИМ МР

ИМ – многозвездный пространственный механизм. Звенья (тела – bodies) ИМ последовательно связаны между собой (образуют КП) таким образом, что образуют открытую (незамкнутую) линейную кинематическую цепь. Звенья ИМ – твердые тела. Каждая КП допускает относительное вращение или относительное линейное перемещение смежных звеньев в направлении только одной оси (сочленение «вращательного» типа – ВШ, вращательная кинематическая пара – ВП или сочленение «поступательного» типа – ПШ, поступательная кинематическая пара – ПП, соответственно). Первое звено ИМ связано с неподвижным основанием. Все звенья ИМ нумеруются, начиная от основания. Основанию ИМ присваивается номер 0.

1.2. Системы координат

С каждым из звеньев ИМ связывается правая прямоугольная (ортогональная) СК так, как показано на рис.1.1. СК_i связана со звеном i. Ось Z_{i-1} СК_{i-1} совмещается с осью i-го сочленения. Начало СК_{i-1} – в центре i-го сочленения. Оси X_{i-1} и Y_{i-1} направляются так, как удобнее. Целесообразно одну из этих осей направить вдоль звена i-1, а другую – в поперечном направлении.

Ось Z_n СК_n обычно направляют вдоль последнего звена, на котором размещено захватное устройство манипулятора (ЗУМ) в сторону рабочей зоны. Начало СК_n обычно размещают в центре ЗУМ. Ось X_n – в поперечном направлении (по движению губок схвата).

СК₀ связывается с неподвижным основанием. Эта система координат в дальнейшем полагается инерциальной и называется «базовой».

1.3. Координаты сочленений

- θ_i - угол поворота звена i относительно звена i-1 вокруг оси Z_{i-1}, если «i = [ВП]» (рис. 1.2);
 - s_i - линейное перемещение звена i относительно звена i-1 вдоль оси Z_{i-1}, если «i = [ПП]».

Замечание:

- “i = [ВП]” следует читать “сочленение i – вращательного типа”,
- “i = [ПП]” следует читать “сочленение i – поступательного типа”,
 $i = 1, 2, \dots, n$.

Нулевые значения координат сочленений соответствуют положению ИМ, которое принимается за исходное.

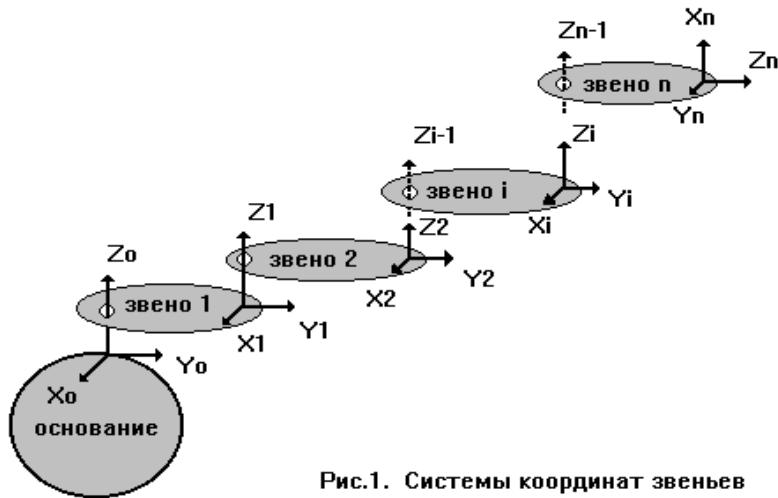


Рис.1. Системы координат звеньев

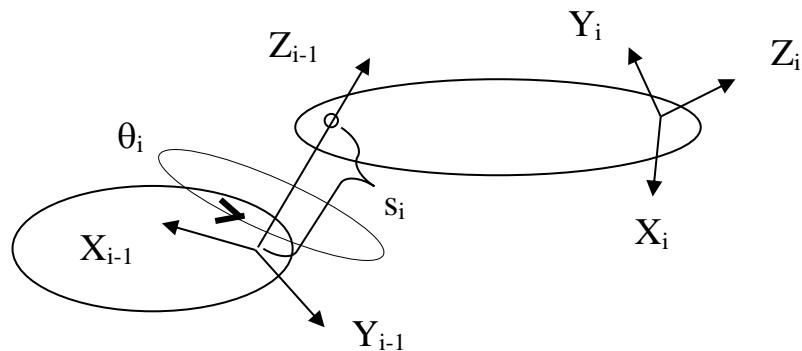


Рис.1.2. Координаты сочленений ИМ

1.4. Параметры ИМ

1.4.1. Параметры кинематической схемы.

- n – число звеньев ИМ,
- σ_i - индикатор типа i -го сочленения; $\sigma_i = 1$, если i -е сочленение – вращательного типа (вращательная кинематическая пара - ВКП) и $\sigma_i = 0$, если i -е сочленение – поступательного типа (ПКП); $i = 1, 2, \dots, n$.

1.4.2. Конструктивные (геометрические) параметры звеньев ИМ (рис.1.3).

- Углы относительной ориентации осей СК смежных звеньев; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – три угла, на которые следует повернуть СК_{i-1} последовательно

вокруг осей X_{i-1} , Y_{i-1} , Z_{i-1} , так, чтобы оси СК_{i-1} стали параллельны соответствующим осям СК_i при значении $\theta_i = 0$ (в исходном положении i-го сочленения); $i = 1, 2, \dots, n$.

- Длина звена i – вектор l_i , проведенный из начала СК_{i-1} к началу СК_i при значении $s_i = 0$ (в исходном положении i-го сочленения); вектор l_i задается в проекциях на оси СК_i: $l_i^{(i)} = [l_{ix} \ l_{iy} \ l_{iz}]^T$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Здесь и далее мы будем записывать выражения для векторов в координатной форме и в виде векторов-столбцов, к примеру

$$l_i = \begin{vmatrix} |l_{ix}| \\ |l_{iy}| \\ |l_{iz}| \end{vmatrix}$$

или в более компактной форме, так

$$l_i^{(i)} = [l_{ix} \ l_{iy} \ l_{iz}]^T.$$

Верхний символ Т означает транспонирование.

Нижний символ при векторе – номер звена, которому принадлежит данный вектор, верхний символ в скобках – номер системы координат, в которой этот вектор задан. Если верхний и нижний индексы совпадают, в дальнейшем можем использовать (для краткости) только нижний индекс.

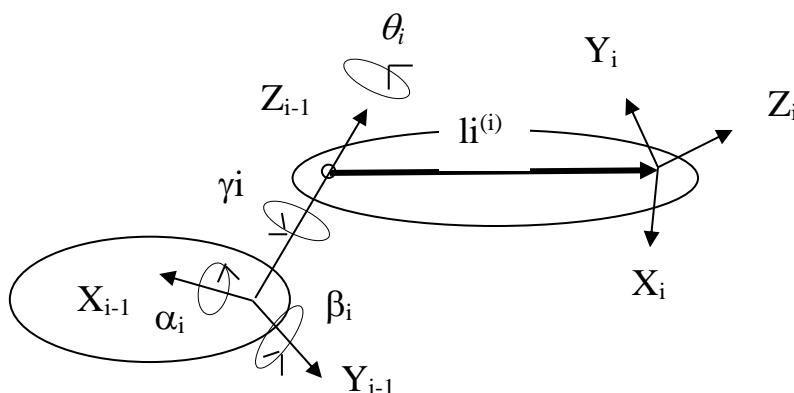


Рис.1.3.
Конструктивные
параметры ИМ

Пояснение. Отсчет углов ориентации осей СК смежных звеньев производится при нулевых значениях координат сочленений !

1.5. Обобщенные координаты ИМ (координаты сочленений)

Обозначаются q_i , $i = 1, 2, \dots, n$ и служат для определения взаимного расположения звеньев. Используют следующие обозначения:

- $q = [q_1, q_2, \dots, q_i \dots q_n]^T$ – вектор размера $(n \times 1)$, в котором $q_i = \theta_i$, если $i = [\text{ВП}]$, $q_i = s_i$, если $i = [\text{ПП}]$; $i = 1, 2, \dots, n$.

Учет типа шарнира производится за счет множителя σ_i :

$$q_i = \sigma_i \theta_i + (1 - \sigma_i) s_i . \quad (1.1)$$

$\sigma_i = 1$ [i = ВП],

$\sigma_i = 0$ [i = ПП],

θ_i отсчитывается при повороте звена i (относительно звена i-1) вокруг оси Z_{i-1} . Положительное значение θ_i соответствует повороту звена i в таком направлении, когда $X_{i-1} \rightarrow Y_{i-1}$ при наблюдении с “конца” оси Z_{i-1} .

s_i отсчитывается при перемещении звена i (относительно звена i-1) вдоль оси Z_{i-1} . Положительное значение s_i соответствует перемещению звена i в направлении оси Z_{i-1} .

Из выражения (1.1) следует, что $\theta_i = \sigma_i q_i$, $s_i = (1 - \sigma_i) q_i$.

1.6. Матрицы поворота систем координат

При моделировании ИМ потребуется рассмотрение векторов в различных системах координат. Это связано с тем, что параметры звеньев ИМ задаются в связанных СК. Уравнения же движения ИМ составляются и рассматриваются в инерциальной (базовой) СК. Очевидно, в общем случае различные системы координат повернуты относительно друг друга. Поэтому координаты одного и того же вектора \mathbf{a} в разных СК не будут совпадать (рис.1.5).

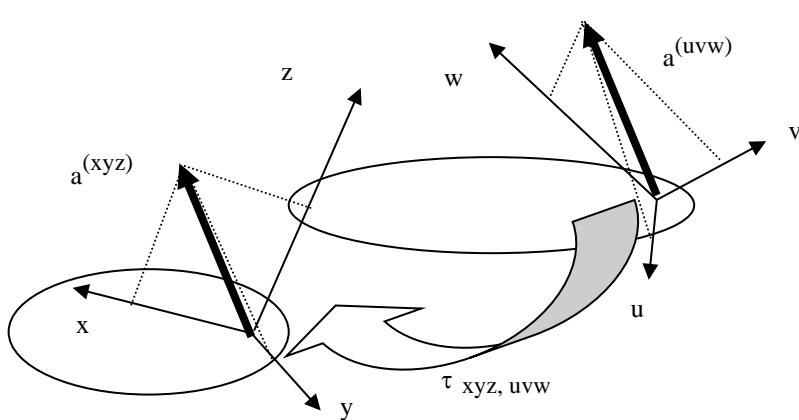
Пусть $\{0xyz\}$ – некоторая СК. Пусть $\{0uvw\}$ – некоторая другая СК. Будем считать, что СК $\{0uvw\}$ образована в результате некоторого поворота, или нескольких поворотов СК $\{0uvw\}$ относительно СК $\{0xyz\}$ из положения, когда СК $\{0xyz\}$ и СК $\{0uvw\}$ совпадали.

СК $\{0xyz\}$ и СК $\{0uvw\}$ могут быть связаны с разными звеньями СК $\{0xyz\}$ и СК $\{0uvw\}$, например, со смежными звеньями: i-1 и i. В этом случае при определении относительного расположения этих звеньев будет считаться, что именно звено i поворачивается относительно звена i-1, но не наоборот! Если СК $\{0xyz\}$ связана со звеном номер 0, а СК $\{0uvw\}$ – со звеном i, то рассматривается поворот звена i относительно стойки.

Связь между значениями координат вектора \mathbf{a} в СК $\{uvw\}$ и СК $\{xyz\}$ устанавливает следующее соотношение

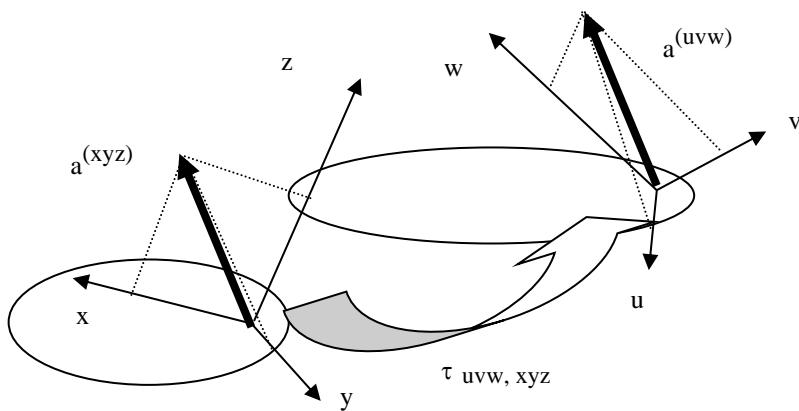
$$\mathbf{a}^{(xyz)} = \tau_{xyz, uvw} \mathbf{a}^{(uvw)},$$

где $\tau_{xyz, uvw}$ – матрица преобразования координат вектора, заданного в СК $\{uvw\}$, в систему координат СК $\{xyz\}$.



Звено с СК {xyz}
неподвижно, звено с
СК {uvw} – подвижна.
Вектор $a^{(uvw)}$
подвижен. Координаты
вектора
 $a^{(uvw)} = \text{const}$
Координаты вектора
 $a^{(xyz)} = \text{var.}$
 $\tau_{xyz, uvw}$ - матрица
поворота СК {uvw}
относительно СК {xyz}

$$a^{(xyz)} = \tau_{xyz, uvw} a^{(uvw)}$$



Звено с СК {xyz}
неподвижно, звено с
СК {uvw} –
подвижно.
Вектор $a^{(xyz)}$
неподвижен.
Координаты вектора
 $a^{(uvw)} = \text{var.}$
Координаты вектора
 $a^{(xyz)} = \text{const.}$

$$a^{(uvw)} = \tau_{xyz, uvw}^T a^{(xyz)}$$

Рис. 1.5. Координаты вектора **a** в СК {xyz} и СК {uvw}.

Получим формулы для расчета матриц преобразования $\tau_{xyz, uvw}$. Вектор **a** (в координатной форме) в проекциях на оси СК {xyz} можно представить в следующем виде

$$a^{(xyz)} = a_x i_x + a_y j_y + a_z k_z .$$

Этот же вектор в проекциях на оси СК {uvw} - так

$$a^{(uvw)} = a_u i_u + a_v j_v + a_w k_w .$$

где

a_x, a_y, a_z - проекции вектора $a^{(xyz)}$ на оси x, y, z ,
 i_x, j_y, k_z - орты осей СК {xyz},
 a_u, a_v, a_w - проекции вектора $a^{(uvw)}$ на оси u, v, w ,
 i_u, j_v, k_w - орты осей СК {uvw}.

Очевидно, что

$$a_x = i_x (a_u i_u + a_v j_v + a_w k_w)$$

$$a_y = j_y (a_u i_u + a_v j_v + a_w k_w)$$

$$a_z = k_z (a_u i_u + a_v j_v + a_w k_w)$$

или

$$[a_x \ a_y \ a_z]^T = \begin{vmatrix} i_u & i_x & j_v i_x & k_w i_x \\ i_u j_y & j_v j_y & k_w j_y \\ i_u k_z & j_v k_z & k_w k_z \end{vmatrix} [a_u \ a_v \ a_w]^T = \tau_{xyz,uvw} [a_u \ a_v \ a_w]^T.$$

Матрицы $\tau_{xyz,uvw}$ устанавливают соответствие между координатами одного и того же вектора **a**, но в различных СК. Из последнего выражения видно, что столбцы матрицы преобразования $\tau_{xyz,uvw}$ есть проекции ортов i_u, j_v, k_w СК {uvw} на оси СК {xyz}. Таким образом, столбцы этой матрицы определяют новые координаты ортов i_u, j_v, k_w повернутой СК {uvw} в исходной СК {xyz} после поворота СК {uvw} относительно СК СК {xyz}. Поэтому матрицу $\tau_{xyz,uvw}$ можно рассматривать как оператор поворота системы координат СК {uvw} относительно СК {xyz}.

Пусть, как и прежде, в исходном положении СК {uvw} и СК {xyz} совпадают. Тогда координаты некоторого вектора **a** относительно СК {xyz}, т.е. $a^{(xyz)}$ и СК {uvw}, т.е. $a^{(uvw)}$, также совпадают. Пусть вектор $a^{(uvw)}$ связан с СК {uvw}. Как это было показано выше, оператор $\tau_{xyz,uvw}$ осуществляет поворот СК {uvw} относительно СК {xyz}. Тогда вектор $a^{(uvw)}$ повернется вместе с СК {uvw}. После такого поворота координаты вектора относительно СК {xyz} приобретут новые значения $a^{(xyz)}$, т.е. это будут уже координаты поворнутого вектора. В этом смысле матрицу $\tau_{xyz,uvw}$ можно рассматривать как оператор поворота СК {uvw} вместе со связанным с ней вектором. Обращаясь к рис. 5, отметим, что в случае преобразования с матрицей $\tau_{xyz,uvw}$ вектор **a** изображен в положении после поворота.

Таким образом, матрицы $\tau_{xyz,uvw}$ - операторы поворота СК (СК {uvw} относительно СК {xyz}) и связанных с ней, т.е. с СК {uvw}, векторов.

В дальнейшем эти матрицы мы будем называть матрицами поворота.

Обратные преобразования устанавливаются из рассмотрения аналогичных соотношений, а именно:

$$a_u = i_u (a_x i_x + a_y j_y + a_z k_z),$$

$$a_v = j_v (a_x i_x + a_y j_y + a_z k_z),$$

$$a_w = k_z (a_x i_x + a_y j_y + a_z k_z)$$

или

$$[a_u \ a_v \ a_w]^T = \begin{vmatrix} i_u & i_x & i_u j_y & i_u k_z \\ j_v i_x & j_v j_y & j_v k_z \\ k_w i_x & k_w j_y & k_w k_z \end{vmatrix} [a_x \ a_y \ a_z]^T = \tau_{uvw,xyz} [a_x \ a_y \ a_z]^T.$$

Из сравнения двух последних равенств следует, что

$$\tau_{uvw, xyz} = \tau^{-1}_{xyz, uvw} = \tau^T_{xyz, uvw}$$

Матрица $\tau_{uvw, xyz}$ преобразует координаты вектора, заданного в СК {xyz}, в СК{uvw} при повороте системы координат СК{uvw} относительно СК {xyz}. Отметим, что, как и прежде, рассматривается поворот именно СК{uvw} относительно СК {xyz}, но не наоборот. При таком преобразовании вектор **a** остается неподвижным. Обращаясь к рис. 5, отметим, что в случае преобразования с матрицей $\tau_{xyz,uvw}$ вектор **a** связан с подвижной СК.

В силу того, что $\tau_{uvw, xyz}$ матрица ортогонального ортонормированного преобразования, $\det \tau_{uvw, xyz} = 1$. Именно +1, поскольку преобразование применяется по отношению к правым СК.

1.6.1. Матрицы поворота вокруг одной координатной оси (матрицы элементарных поворотов).

Получим выражения для расчета матриц поворота вокруг одной из осей.

A) поворот СК {uvw} вокруг оси x СК {xyz} (ось u в СК {uvw}) на угол α (рис.1.6):

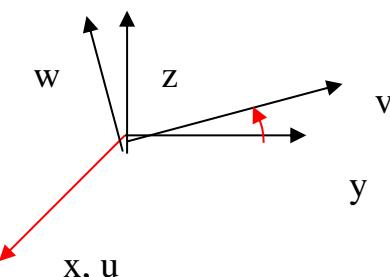


Рис.1.6. Поворот вокруг оси x

$$\tau_{xyz,uvw} (\text{ось } x, \text{ угол } \alpha) = \begin{vmatrix} i_u & i_x & j_v & i_x & k_w i_x \\ i_u j_y & j_v j_y & k_w j_y \\ i_u k_z & j_v k_z & k_w k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \tau_x(\alpha)$$

Матрица обратного преобразования имеет вид

$$\tau_{uvw,xyz} (\text{ось } x, \text{ угол } \alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \tau_x^T(\alpha).$$

В дальнейшем матрицу $\tau_{uvw,xyz}$ (ось x, угол α) для краткости будем записывать так

$$\tau_{xyz, uvw} (\text{ось } x, \text{ угол } \alpha) = \tau_x(\alpha);$$

Б) поворот СК {uvw} вокруг оси y CK {xyz} (ось v в СК {uvw}) на угол β (Рис.1.7):

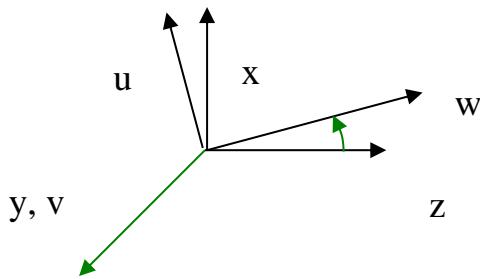


Рис.1.7. Поворот вокруг оси y

$$\tau_{xyz, uvw} (\text{ось } y, \text{ угол } \beta) = \begin{vmatrix} i_u & i_x & j_v & i_x & k_w i_x \\ i_u & j_y & j_v & j_y & k_w j_y \\ i_u & k_z & j_v & k_z & k_w k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{vmatrix} = \tau_y(\beta).$$

Матрица обратного преобразования

$$\tau_{uvw, xyz} (\text{ось } y, \text{ угол } \beta) = \begin{vmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{vmatrix}.$$

Для краткости матрице $\tau_{uvw, xyz}$, (ось y, угол β) будем записывать в виде

$$\tau_{xyz, uvw} (\text{ось } y, \text{ угол } \beta) = \tau_y(\beta);$$

Б) поворот СК {uvw} вокруг оси z CK {xyz} (ось w в СК {uvw}) на угол γ (рис.1.8):

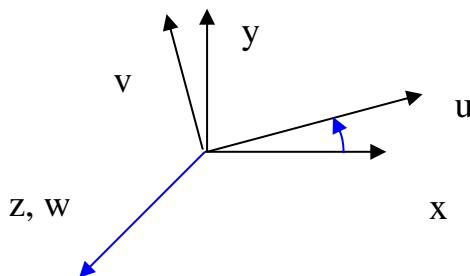


Рис.1.8. Поворот вокруг оси z

$$\tau_{xyz, uvw} \text{ (ось } z, \text{ угол } \gamma) = \begin{vmatrix} i_u & i_x & j_v & i_x & k_w i_x \\ i_u j_y & j_v j_y & k_w j_y \\ i_u k_z & j_v k_z & k_w k_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \tau_z(\gamma).$$

Матрица обратного преобразования

$$\tau_{uvw, xyz} \text{ (ось } z, \text{ угол } \gamma) = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Для краткости матрицу $\tau_{uvw, xyz}$ (ось z, угол γ) будем записывать в виде

$$\tau_{xyz, uvw} \text{ (ось } z, \text{ угол } \gamma) = \tau_z(\gamma).$$

1.6.2. Матрицы композиции элементарных поворотов

Любой пространственный поворот СК можно представить как композицию трех элементарных поворотов. Так например, если СК {uvw} образована в результате выполнения трех последовательных поворотов относительно СК {xyz}: вначале – вокруг оси x (новую СК обозначим {uv`w`}), затем (после первого поворота) – вокруг оси v` (новую СК обозначим {u`v`w``}), затем (после двух первых поворотов – вокруг оси w`` – СК {u``v``w``}), то матрица композиции этих преобразований может быть получена путем перемножения матриц элементарных поворотов, так

$$\tau_{xyz, uvw} = \tau_{xyz, uvw} \text{ (СК } \{uvw\}, \text{ ось } u, \text{ угол } \alpha) \tau_{xyz, uvw} \text{ (СК } \{uvw\}, \text{ ось } v^{\prime}, \text{ угол } \beta) \tau_{xyz, uvw} \text{ (СК } \{uvw\}, \text{ ось } w^{''}, \text{ угол } \gamma)$$

Отметим, что последовательность элементарных поворотов *может быть различной* (например: вначале v, затем u, затем w). При этом результирующие матрицы будут *отличаться*. Поэтому при определении матрицы композиции преобразований нужно указывать последовательность применения преобразований.

При написании последовательности операторов учитываем, что осуществляются последовательные повороты СК {uvw} вместе с закреплённым с ней вектором относительно СК {xyz} в заданном порядке (ось u, ось v`, ось w``), но координаты векторов из СК {uvw} в СК {xyz} преобразуются в обратном порядке! Поэтому матрица первого поворота – самая первая слева (последнее преобразование вектора из СК {uvw} в СК {xyz}). Матрица последнего поворота – самая последняя слева (первое преобразование вектора из СК {uvw} в СК {xyz}).

Этот факт иллюстрирует рисунок 1.10. Зеленый цвет – последовательность поворотов СК. Синий – последовательность

преобразований векторов, заданных координатами в подвижной СК, в неподвижную.

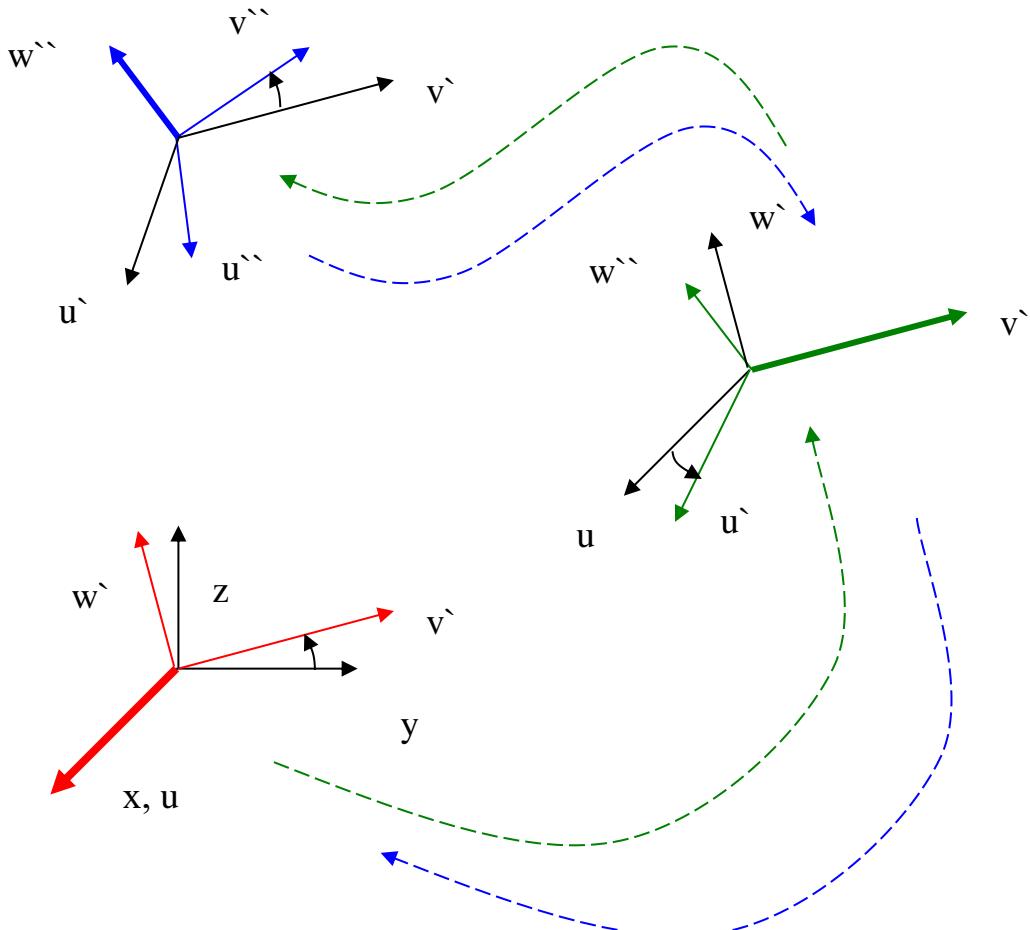


Рис. 1.10. Последовательности преобразований

1.6.3. Матрицы сложных поворотов

Матрица преобразования поворота СК_{uvw} относительно СК_{xyz} может быть представлена как последовательность двух и более поворотов:

$$\tau_{xyz, uvw} = \tau_{xyz, uvw}(1) \dots \tau_{xyz, uvw}(n-1) \tau_{xyz, uvw}(n),$$

где $\tau_{uvw, xyz}(i)$ – матрица i-го поворота (композиция элементарных поворотов или отдельные элементарные повороты).

Если, например, $\tau_{i-1, i}$ – матрица поворота СК_i относительно СК_{i-1}, то матрицу поворота СК_i относительно СК₀ можно представить в виде

$$\tau_{0i} = \prod_{k=1}^i \tau_{k-1, k} = \tau_{01} \tau_{12} \tau_{23} \dots \tau_{n-1, n}$$

Матрицы сложных поворотов можно представить в рекуррентной форме

$$\tau_{0i} = \tau_{0i-1} \tau_{i-1, i}, i = 1, 2, \dots, n.$$

1.6.4. Матрицы поворота СК смежных звеньев ИМ

Положение в пространстве $СК_i$ относительно $СК_{i-1}$ можно задать, выполнив последовательно четыре поворота $СК_i$, – вокруг оси Z_i на угол $\sigma_i q_i$, затем последовательно вокруг осей $X_i^{\wedge}, Y_i^{\wedge\wedge}, Z_i^{\wedge\wedge\wedge}$.

Поэтому матрица поворота $СК_i$ относительно $СК_{i-1}$ может быть записана в виде

$$\begin{aligned}\tau_{i-1i} = & \tau_{i-1i}(\text{ось } Z_i, \text{ угол } \sigma_i q_i) \tau_{i-1i}(\text{ось } X_i^{\wedge}, \text{ угол } \alpha_i) x \\ & \tau_{i-1i}(\text{ось } Y_i^{\wedge\wedge}, \text{ угол } \beta_i) \tau_{i-1i}(\text{ось } Z_i^{\wedge\wedge\wedge}, \text{ угол } \gamma_i).\end{aligned}$$

Используя матрицу τ_{i-1i} , можно определить координаты вектора, заданного в $СК_i$, в $СК_{i-1}$:

$$a^{(i-1)} = \tau_{i-1i} a^{(i)},$$

Обратное преобразование запишется так:

$$a^{(i)} = \tau_{i-1i}^{-1} a^{(i-1)}.$$

Матрицы τ_{i-1i} и τ_{i-1i}^{-1} связаны соотношениями (оси СК ортогональны, СК ортонормированы)

$$\tau_{i-1i} = \tau_{i-1i}^T.$$

С учетом введенных в п.1.6.1 обозначений можно записать

$$\tau_{i-1i} = \tau_z(\sigma_i q_i) \tau_x(\alpha_i) \tau_y(\beta_i) \tau_z(\gamma_i),$$

$$\tau_{i-1i}^{-1} = \tau_z^T(\gamma_i) \tau_y^T(\beta_i) \tau_x^T(\alpha_i) \tau_z^T(\sigma_i q_i) = \tau_{i-1i}^T. \quad (1.4)$$

Очевидно,

$\tau_z(\sigma_i q_i)$ – матрица поворота СК_i вокруг оси Z_{i-1} на угол $\sigma_i q_i$,

$\tau_x(\alpha_i)$ – матрица поворота СК_i вокруг оси X_i^{\wedge} (после предыдущего поворота СК_i), на угол α_i ,

$\tau_y(\beta_i)$ – матрица поворота СК_i вокруг оси $Y_i^{\wedge\wedge}$ (после двух предыдущих поворотов) на угол β_i ,

$\tau_z(\gamma_i)$ – матрица поворота СК_i вокруг оси $Z_i^{\wedge\wedge\wedge}$ (после трех предыдущих поворотов) на угол γ_i .

Матрица $\tau_z(\gamma_i) \tau_y(\beta_i) \tau_x(\alpha_i) = \text{const.}$

Обозначив

$$\varepsilon_i = \tau_x(\alpha_i) \tau_y(\beta_i) \tau_z(\gamma_i),$$

выражение для τ_{i-1i} можно представить в виде

$$\tau_{i-Ii} = \tau_z(\sigma_i q_i) \tau_x(\alpha_i) \tau_y(\beta_i) \tau_z(\gamma_i) = \tau_z(\sigma_i q_i) \varepsilon_i$$

Обратная матрица имеет вид

$$\tau_{i-I} = \varepsilon_i^T \tau_z^T(\sigma_i q_i).$$

Таким образом, матрица преобразования систем координат смежных звеньев является функцией одной переменной – i-й обобщенной координаты ИМ и четырех постоянных величин – индикатора типа i-го сочленения и 3-х конструктивных параметров – углов установки осей СК_i относительно СК_{i-1}.

ЛЕКЦИЯ 3

2. Положение ИМ в рабочем пространстве. Линейные и угловые координаты звеньев

2.1. Линейные координаты звеньев ИМ относительно базовой СК

Из рис.2.1

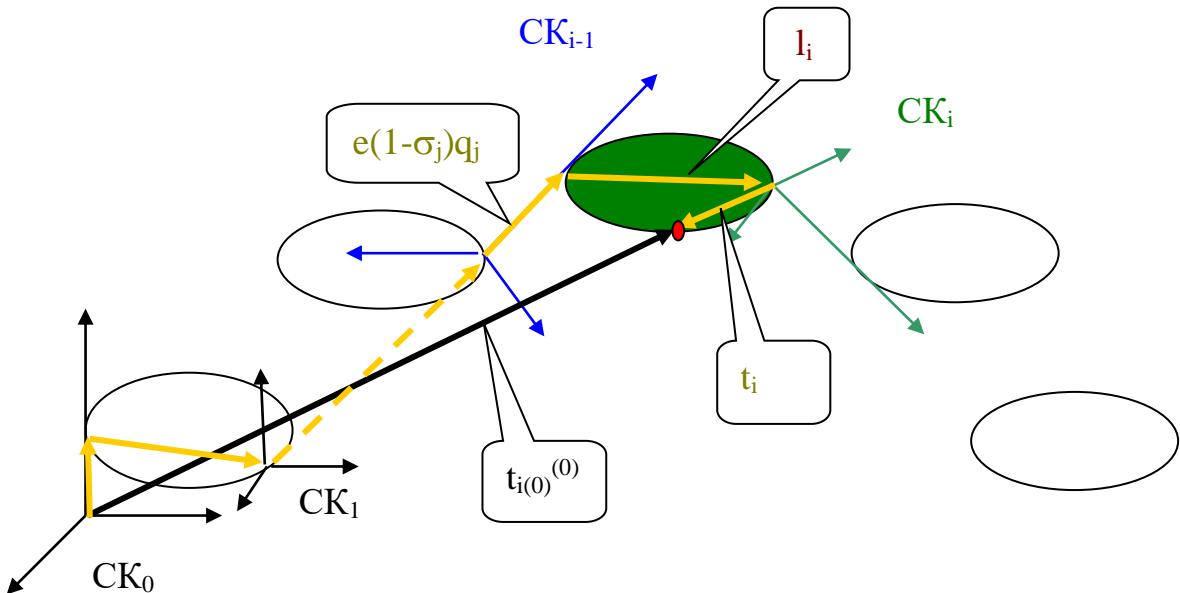


Рис.2.1 Вычисление линейных координат точек звеньев

следует, что координаты некоторой точки t на звене i , заданной относительно начала связанной с этих звено СК_i (в проекциях на оси СК_i) вектором $t_i = t_{i(i)}^{(i)}$, относительно инерциальной СК $t_{i(0)}^{(0)}$ могут быть вычислены следующим образом

$$t_{i(0)}^{(0)} = \tau_{0i} t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^i (\tau_{0j-1} e(1-\sigma_j) q_j + \tau_{0j} l_j),$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Пояснение. В записи вектора координат точки $t_{i(i)}^{(i)}$ используются два нижних индекса: первый обозначает номер звена, на котором находится точка, второй (в скобках, внизу) определяет номер СК, относительно начала которой задан вектор. Верхний индекс в скобках – номер СК, в которой записываются координаты вектора t_i . Если совпадают нижние индексы, будем использовать только один нижний индекс (без скобок). Если совпадают все три – также оставляем только один нижний (без скобок).

К примеру

$$t_{i(i)}^{(i)} = t_i$$

Обозначено $e = [001]^T$ - орт оси Z произвольной СК.

Учитывая, что

$$\tau_{0j-1} e = \tau_{0j-1} \tau_{j-1i} \tau_{i,j-1} e = \tau_{0j} \tau_{i,j-1} e = \tau_{0j} \varepsilon^T_i \tau_z^T(\sigma_i q_i) e = \tau_{0j} \varepsilon^T_i e = \tau_{0j} v_i,$$

где обозначено

$$v_i = \varepsilon^T_i e = \text{const},$$

последнее выражение можно переписать так

$$t_{i(0)}^{(0)} = \tau_{0i} t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_i (1-\sigma_j) q_j + l_j) = \tau_{0i} t_{i(i)}^{(i)} + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} L_i,$$

где

$$\tau_{0j} = \prod_{k=1}^j \tau_{k-1 k}$$

- матрица поворота СК_j относительно СК₀,

$$L_i = v_i (1-\sigma_i) q_i + l_i -$$

вектор длины i-го звена с учетом перемещений в поступательной паре.

При выполнении вычислений мы учили, что

$$\tau_z^T(\sigma_i q_i) e = e.$$

Из выражения для v_i следует, что этот вектор - суть вектор проекций орта Z_{i-1} на оси СК_i,

ε_i – матрица поворота СК_i относительно СК_{i-1} при нулевых значениях координат q_i .

2.2. Ориентация СК звеньев ИМ относительно базовой СК

Ориентация СК звеньев относительно базовой СК устанавливается с использованием систем координат звеньев - по матрицам τ_{0i} . Первые столбцы этих матриц – проекции ортов осей X СК_i на оси базовой СК. Вторые столбцы - проекции ортов осей Y СК_i на оси базовой СК. Третьи - проекции ортов осей Z СК_i на оси базовой СК. Элементы матриц τ_{0j} – косинусы углов между одноименными осями СК звеньев и базовой СК.

На практике неудобно определять относительную ориентацию осей СК, рассматривая значения косинусов углов между осями соответствующих

СК. В этой связи для определения взаимной ориентации осей СК применяется параметры, более привычные для восприятия. Представление об окружающей действительности человеку более удобно отображать в форме расстояний и углов. Выше мы получили формулы для расчета линейных координат точек на звеньях. Однако эти данные не полностью отражают положение звена ИМ МР в пространстве. Для полного представления о положении звена ИМ нужно определить также ориентацию СК звеньев относительно базовой СК в удобном для восприятия виде. В Теоретической Механике для этого предложено применять угловые координаты. Для определения ориентации звеньев СК звеньев относительно базовой СК применяются углы Эйлера.

Предполагается, что связанная со звеном СК повернута из исходного положения, совпадающего с инерциальной СК, до ее фактического положения в результате выполнения трех поворотов. Каждый из поворотов осуществляется на определенный угол. Тогда информация о взаимной ориентации двух СК может быть представлена в виде трех углов.

В робототехнике часто преобразование поворота подвижной СК{uvw} относительно трех осей инерциальной СК{x,y,z} представляется в несколько ином виде - как композиция из следующих трех элементарных поворотов:

- ось u, угол Pitch, ниже обозначается как P,
- ось v` , угол Yaw, обозначается Y,
- ось w`` , угол Roll, обозначается R.

$$\tau_{xyz, uvw} = \tau_{xyz, uvw} (\text{ось } u, \text{ угол } \underline{\text{Pitch}}) \tau_{xyz, uvw} (\text{ось } v^{\prime}, \text{ угол } \underline{\text{Yaw}}) \tau_{xyz, uvw} (\text{ось } w^{''}, \text{ угол } \underline{\text{Roll}})$$

Таким образом для определения ориентации СК_i относительно базовой СК₀ используются значения трех углов (P, Y, R).

Рассмотрим выражения для определения углов (R, Y, P). С одной стороны,

$$\tau_{0i} = \tau_{0i} (\text{ось } u, \text{ угол } \underline{\text{Pitch}}) \tau_{0i} (\text{ось } v^{\prime}, \text{ угол } \underline{\text{Yaw}}) \tau_{0i} (\text{ось } w^{''}, \text{ угол } \underline{\text{Roll}}).$$

С другой стороны,

$$\tau_{0j} = \prod_{k=1}^j \tau_{k-1 k} = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix},$$

причем значения $\tau_{k-1 k}$ нам известны; поэтому известны и τ_{0j} .

Полагая известными τ_{0i} , найдем значения углов R, Y, P. Для этого вначале представим предпоследнее соотношение в виде

$$\tau_{0i}^{-T} (\text{ось } u, \text{ угол } \underline{P}) \tau_{0i} = \tau_{0i} (\text{ось } v^{\prime}, \text{ угол } \underline{Y}) \tau_{0i} (\text{ось } w^{''}, \text{ угол } \underline{R}).$$

Выполняя действия, предписанные последним соотношением, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos P & \sin P \\ 0 & -\sin P & \cos P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos Y & 0 & \sin Y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin Y & 0 & \cos Y \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \cos R & -\sin R & 0 \\ \sin R & \cos R & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Выполняя соответствующие действия, получим (для краткости знак подчеркивания опущен),

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} \cos P + t_{31} \sin P & t_{22} \cos P + t_{32} \sin P & t_{23} \sin P + t_{33} \cos P \\ t_{32} \cos P - t_{22} \sin P & -t_{21} \sin P + t_{31} \cos P & -t_{23} \sin P + t_{33} \cos P \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos Y \cos R & -\cos Y \sin R & \sin Y \\ \sin R & \cos R & 0 \\ -\sin Y \sin R & \sin Y \cos R & \cos Y \end{vmatrix}.$$

Сравнив элементы .₂₃ матриц в левой и правой части, видим, что

$$t_{23} \cos P + t_{33} \sin P = 0,$$

откуда

$$\sin P / \cos P = -t_{23}' / t_{33} \quad \text{и}$$

$$P = \operatorname{Arctg}(-t_{23}' / t_{33}).$$

$\operatorname{Arctg}(.)$ – функция двух величин, записанных в числителе и в знаменателе.

Рассмотрим эту функцию в общем виде

$\operatorname{Arctg}(y/x)$, где y, x – некоторые величины (или функции).

Значение $\operatorname{Arctg}(.)$ вычисляется так

$$\operatorname{Arctg}(.) =$$

| $\operatorname{arctg}(y/x)$ | если | $x > 0$ |
|-----------------------------------------|--------|-------------------|
| $\operatorname{arctg}(y/x) + 180^\circ$ | - // - | $x < 0, y \geq 0$ |
| $\operatorname{arctg}(y/x) - 180^\circ$ | - // - | $x < 0, y < 0$ |
| 90° | - // - | $x = 0, y > 0$ |
| -90° | - // - | $x = 0, y < 0$ |
| Не определен | - // - | $x = 0, y = 0$ |

Функцию $\operatorname{Arctg}(y/x)$ обозначают еще так: $\operatorname{atan2}(y, x)$

Далее сравним элементы .₁₃ и .₃₃ матриц:

$\sin Y = t_{13}$, $\cos Y = -t_{23} \sin P + t_{33} \cos P$ и

$$Y = \operatorname{Arctg}(t_{13} / (-t_{23} \sin P + t_{33} \cos P)).$$

Наконец, рассмотрим элементы t_{21} и t_{22} :

$$\sin R = t_{21} \cos P + t_{31} \sin P, \quad \cos R = t_{22} \cos P + t_{32} \sin P \text{ и}$$

$$R = \operatorname{Arctg}((t_{21} \cos P + t_{31} \sin P) / (t_{22} \cos P + t_{32} \sin P)).$$

Отметим, что аналогичным образом можно получить выражения и для расчета углов Эйлера по матрице τ_{0i} . Последовательность поворотов иная: Ось Z, Ось X, Ось Z.

Мы далее будем рассматривать поворот СК как последовательность (P, Y, R).

Прямая позиционная кинематическая задача

Определение линейных координат точек на ЗУМ и ориентации СК ЗУМ относительно базовой СК при заданных значениях координат шарниров и заданных параметрах звеньев ИМ носит название прямой позиционной кинематической задачи (применяется также термин «позиционная задача»).

Решение прямой позиционной задачи выражается формулами

$$t_{n(0)}^{(0)} = \tau_{0n} t_{n(n)}^{(n)} + \sum_{j=1}^n \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) q_j + l_j),$$

или

$$t_{n(0)}^{(0)} = \tau_{0n} t_{n(n)}^{(n)} + \sum_{j=1}^n \tau_{0j} L_j,$$

где

$$L_j = v_j (1-\sigma_j) q_j + l_j$$

- вектор, связывающих начала СК смежных звеньев,

$$\tau_{0n} = \prod_{k=1}^n \tau_{k-1 k},$$

$$t_n = t_{n(n)}^{(n)}.$$

Прямая позиционная кинематическая задача всегда имеет решение и при этом единственное.

2.3. Понятие обратной позиционной кинематической задачи

Определение координат сочленений по заданным линейным координатам ЗУМ и углам его ориентации относительно базовой СК при известных параметрах звеньев ИМ носит название обратной кинематической задачи о положении ИМ или обратной позиционной кинематической задачи (сокращенно, ОКЗ).

В общей постановке для многих ИМ обратная позиционная кинематическая задача может иметь несколько решений, бесчисленное множество решений или не иметь ни одного решения.

Первый случай связан с тем, что одному и тому же положению и ориентации ЗУМ относительно базовой СК может соответствовать несколько разных наборов значений координата шарниров.

ЛЕКЦИЯ 4

ПРИМЕР определения (задания) кинематических и геометрических параметров звеньев ИМ

Рассмотрим ИМ космического МР ERA (например, [ESA](#) - [European Robotic Arm](#) www.esa.int/.../ и др.).

ИМ ERA включает 7 звеньев и 7 сочленений вращательного типа. Схематически ИМ изображен на рис. 1 в сложенном положении. Структурные составляющие ИМ включают 2 ЗУМ (ЕЕ на рис.). Запястье – узел из 3-х шарниров (крен, рысканье, наклон), 2 балки, узел локтя. В состав конструкции звеньев включены бортовой компьютер, блок электроники и др. На ЗУМ и балках размещены камеры СТЗ.

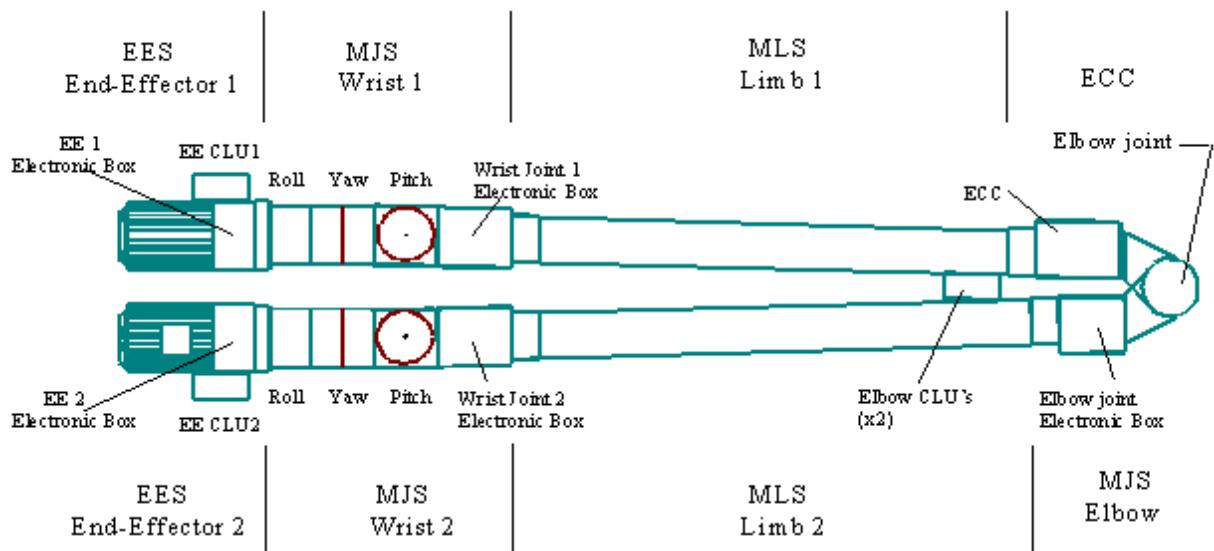


Рис.1. Схема расположения узлов ERA.

Размеры отдельных узлов ERA приведены на рис.2

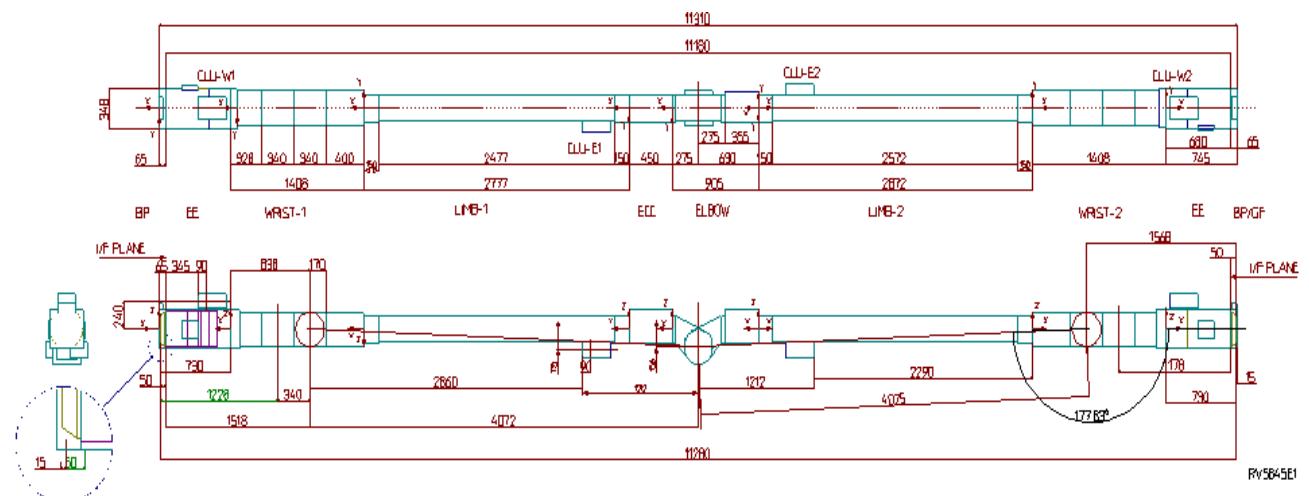


Рис.2. Размеры узлов ERA.

Схематически ИМ изображен на рис. 3 в положении, которое принимается за исходное. Исходное положение ИМ – такое, когда все и каждый из 7 координат сочленений q_i равны 0. На концах ИМ расположены захватные устройства (ЗУМ – желтый цвет), предназначенные для присоединения к базовым точкам Российского сегмента МКС и для захвата предметов и приспособлений (например, в случае перемещения с помощью ERA космонавта). Для обеспечения однозначности изображения на каждом из ЗУМ показана камера системы технического зрения (красный цвет). Размеры на рис. 3 указаны приближенно.

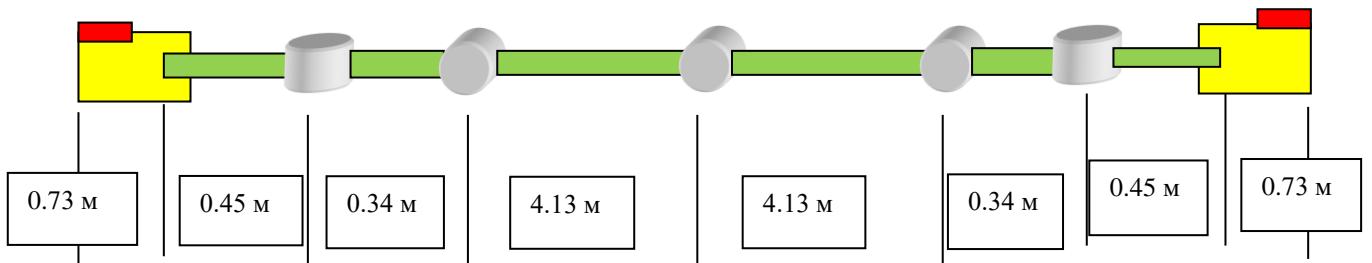


Рис. 3. Кинематическая схема (условно).

$$n=7, \sigma_{1-7}=1.$$

1) Определим параметры звеньев ИМ.

Вводим СК звеньев как описано выше (рис.4).

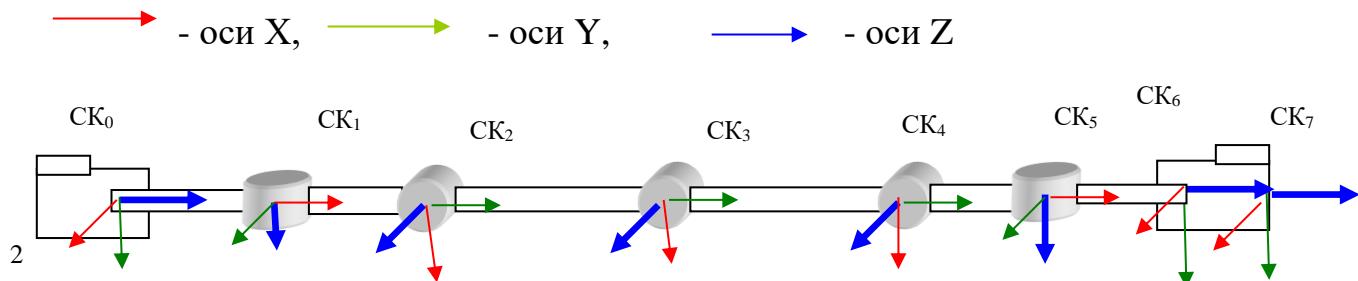


Рис.4. СК звеньев ИМ

2) В соответствии с чертежом и введенными СК получим значения векторов длин звеньев и углов относительного поворота СК смежных звеньев.

$$\begin{aligned} l_1 &= (0.45 \ 0 \ 0)^T & l_2 &= (0 \ 0.34 \ 0)^T & l_3 &= (0 \ 4.13 \ 0)^T \\ l_4 &= (0 \ 4.13 \ 0)^T & l_5 &= (0.34 \ 0 \ 0)^T & l_6 &= (0 \ 0 \ 0.45)^T & l_7 &= (0 \ 0 \ 0.73)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -90^0, \quad \beta_1 = 0, \quad \gamma_1 = -90^0 \\ \alpha_2 &= -90^0, \quad \beta_2 = 0, \quad \gamma_2 = -90^0 \\ \alpha_3 = \beta_3 = \gamma_3 &= 0^0 \quad \alpha_4 = \beta_4 = \gamma_4 = 0^0 \quad \alpha_5 = 0^0, \quad \beta_5 = 90^0, \quad \gamma_5 = 90^0 \\ \alpha_6 &= 0, \quad \beta_5 = 90^0, \quad \gamma_6 = 90^0 \quad \alpha_7 = \beta_7 = \gamma_7 = 0^0 \end{aligned}$$

3) Найдем выражения для расчета матриц перехода между СК звеньев

$$\tau_{01} (q_1 = 0) = \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{12} (0) = \varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{23} (0) = \varepsilon_3 = E,$$

$$\tau_{34} (0) = \varepsilon_4 = E,$$

$$\tau_{45} (0) = \varepsilon_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon_6^T = \tau_{65} (0) = \varepsilon_5$$

$$\varepsilon_7^T = \tau_{76} (0) = E.$$

$$\begin{aligned} \tau_{01} (q_1) &= (Cq_1 \ -Sq_1 \ 0, \ Sq_1 \ Cq_1 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1) \varepsilon_1^T = \\ &= (Cq_1 \ -Sq_1 \ 0) \quad (0 \ 1 \ 0) \quad (0 \ Cq_1 \ -Sq_1), \\ &\quad (Sq_1 \ Cq_1 \ 0) \quad (0 \ 0 \ 1) \quad (0 \ Sq_1 \ Cq_1) \\ &\quad (0 \ 0 \ 1) \quad (1 \ 0 \ 0) = (1 \ 0 \ 0). \end{aligned}$$

Далее для краткости матрицы записываются «в строчку»

$$\begin{aligned}\tau_{12} &= (Cq_2 - Sq_2 \ 0, \ Sq_2 Cq_2 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1) \varepsilon_2 = \\ &= (Cq_2 - Sq_2 \ 0, \ Sq_2 Cq_2 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1) (010, 001, 100) = \\ &= (0 \ Cq_2 - Sq_2, \ 0 \ Sq_2 Cq_2 \ 0, \ 1 \ 0 \ 0).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{23} &= (Cq_3 - Sq_3 \ 0, \ Sq_3 Cq_3 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1) \varepsilon_3 = \\ &= (Cq_3 - Sq_3 \ 0, \ Sq_3 Cq_3 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1) (100, 010, 001) = \\ &= (Cq_3 - Sq_3 \ 0, \ Sq_3 Cq_3 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{34} &= (Cq_4 - Sq_4 \ 0, \ Sq_4 Cq_4 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1) \varepsilon_4 = \\ &= (Cq_4 - Sq_4 \ 0, \ Sq_4 Cq_4 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1) (100, 010, 001) = \\ &= (Cq_4 - Sq_4 \ 0, \ Sq_4 Cq_4 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1).\end{aligned}$$

...

И т.д.

4). Матрица $\tau_{07} = \tau_{01}\tau_{12}\tau_{23}\tau_{34}\tau_{45}\tau_{56}\tau_{67}$.

В исходном положении (при нулевых значениях координат сочленений) эта матрица в данном примере имеет вид

$$\tau_{07} = (1 \ 0 \ 0, \ 0 \ 1 \ 0, \ 0 \ 0 \ 1).$$

В общем виде матрица τ_{07} запишется так

$$\begin{aligned}\tau_{07} &= \tau_z(q_1)\varepsilon_1\tau_z(q_2)\varepsilon_2\tau_z(q_3)\varepsilon_3\tau_z(q_4)\varepsilon_4\tau_z(q_5)\varepsilon_5\tau_z(q_6)\varepsilon_6\tau_z(q_7)\varepsilon_7 = \\ &= \tau_{07}(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7).\end{aligned}$$

Видим, что τ_{07} есть функция 7 обобщенных координат, которые, в свою очередь, являются функциями времени, что соответствует различным (изменяющимся) координатам ЗУМ.

Одна из возможных конфигураций кинематической цепи ERA имеет вид

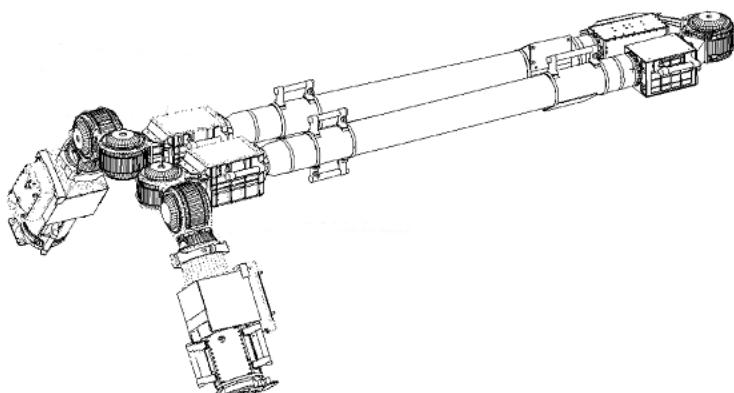


Рис.5.

Такая конфигурация применяется в транспортном положении ERA при размещении на внешней поверхности модуля - носителя.

5). Найдем теперь выражения для расчета координат векторов, связывающих начала базовой СК и начала СК звеньев

$$t_{1(0)}^{(0)} = \tau_{01} l_1 = (0 \ 0 \ 0.45)^T$$

$$t_{2(0)}^{(0)} = \tau_{01} l_1 + \tau_{02} l_2 = (0 \ 0 \ 0.45)^T + 0.34 (Cq_1 Sq_2 \ Sq_1 Sq_2 \ Cq_2)^T$$

$$t_{3(0)}^{(0)} = \tau_{01} l_1 + \tau_{02} l_2 + \tau_{03} l_3 = (0 \ 0 \ 0.45)^T + 0.34 (Cq_1 Sq_2 \ Sq_1 Cq_2 \ Cq_2)^T + \\ 4.13 (Cq_1 Sq_2 Cq_3 \ -Sq_3 Cq_1 + Sq_1 Sq_2 Cq_3 \ Cq_2 Cq_3)^T$$

...

В некотором положении ИМ элементы матрицы τ_{07} имеют следующие значения

$$\begin{array}{ccc} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4} & \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} \end{array}$$

Вычислим значения поворота СК₇ относительно СК₀ в последовательности поворотов СК₇ последовательно вокруг осей X, Y, Z базовой СК.
В соответствии с приведенными выше формулами будем иметь

$$P = \text{Arctg} (-t_{23} / t_{33}) = \text{Arctg} \left(\frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{4}} \right) = \text{Arctg} (1 / \sqrt{3}) = 30^0$$

$$Y = \text{Arctg} (t_{13} / (-t_{23} \sin P + t_{33} \cos P)) = \text{Arctg} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(\frac{1}{4} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \right) =$$

$$\text{Arctg} \left(\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{8}} \right) = \text{Arctg} (\sqrt{3}) = 60^0$$

$$R = \operatorname{Arctg} ((t_{21} \cos P + t_{31} \sin P) / (t_{22} \cos P + t_{32} \sin P)) =$$

$$= \operatorname{Arctg} \left(\frac{\left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4}\right) \frac{1}{2}}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{4}\right) \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \frac{1}{2}} \right) = \operatorname{Arctg} \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{3}{8} - \frac{3\sqrt{3}}{16} + \frac{1}{8}\right)}{\left(-\frac{3}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{16} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)} = \operatorname{Arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$30^0$$

ПРОВЕРКА

$$\begin{array}{ccccccccc} \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{8} + \frac{1}{4} & \frac{3}{8} + \frac{\sqrt{3}}{4} & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array} = \begin{array}{ccccccccc} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

2.3. Прямая позиционная кинематическая задача

Определение линейных координат точек на звеньях и ориентации СК звеньев относительно базовой СК при заданных значениях координат шарниров и заданных параметрах звеньев ИМ носит название прямой позиционной кинематической задачи. Прямая позиционная кинематическая задача всегда имеет решение и притом единственное. Часто применяют термин прямая позиционная задача.

2.3.1. Прямая позиционная задача в управлении манипулятором

При управлении манипулятором важно знать положение и ориентацию ЗУМ МР относительно базовой СК. Эта задача решается на основе опроса датчиков координат сочленений путем вычислений по формулам пп 2.1 и 2.2. Результаты вычислений выдаются на пульт управления МР и в ТСУ и ССУ МР.

2.4. Обратная позиционная кинематическая задача

Определение координат сочленений по заданным линейным координатам ЗУМ и углам его ориентации относительно базовой СК при известных параметрах звеньев ИМ носит название обратной кинематической

задачи о положении ИМ или обратной позиционной кинематической задаче (сокращенно, ОКЗ).

В общей постановке для многих ИМ обратная позиционная кинематическая задача может иметь несколько решений, бесчисленное множество решений или не иметь ни одного решения.

Первый случай связан с тем, что одному и тому же положению и ориентации ЗУМ относительно базовой СК может соответствовать несколько разных наборов значений координат шарниров.

Рисунок иллюстрирует один из таких случаев. Одному и тому же положению и ориентации ЗУМ изображенного на этом рисунке ИМ соответствуют 2 набора значений координат шарниров:

$q_1 = 0, q_2 = -30$ град., $q_3 = 0$ град. (на рисунке слева)

и

$q_1 = 180$ град, $q_2 = +30$ град., $q_3 = 180$ град. (на рисунке справа)

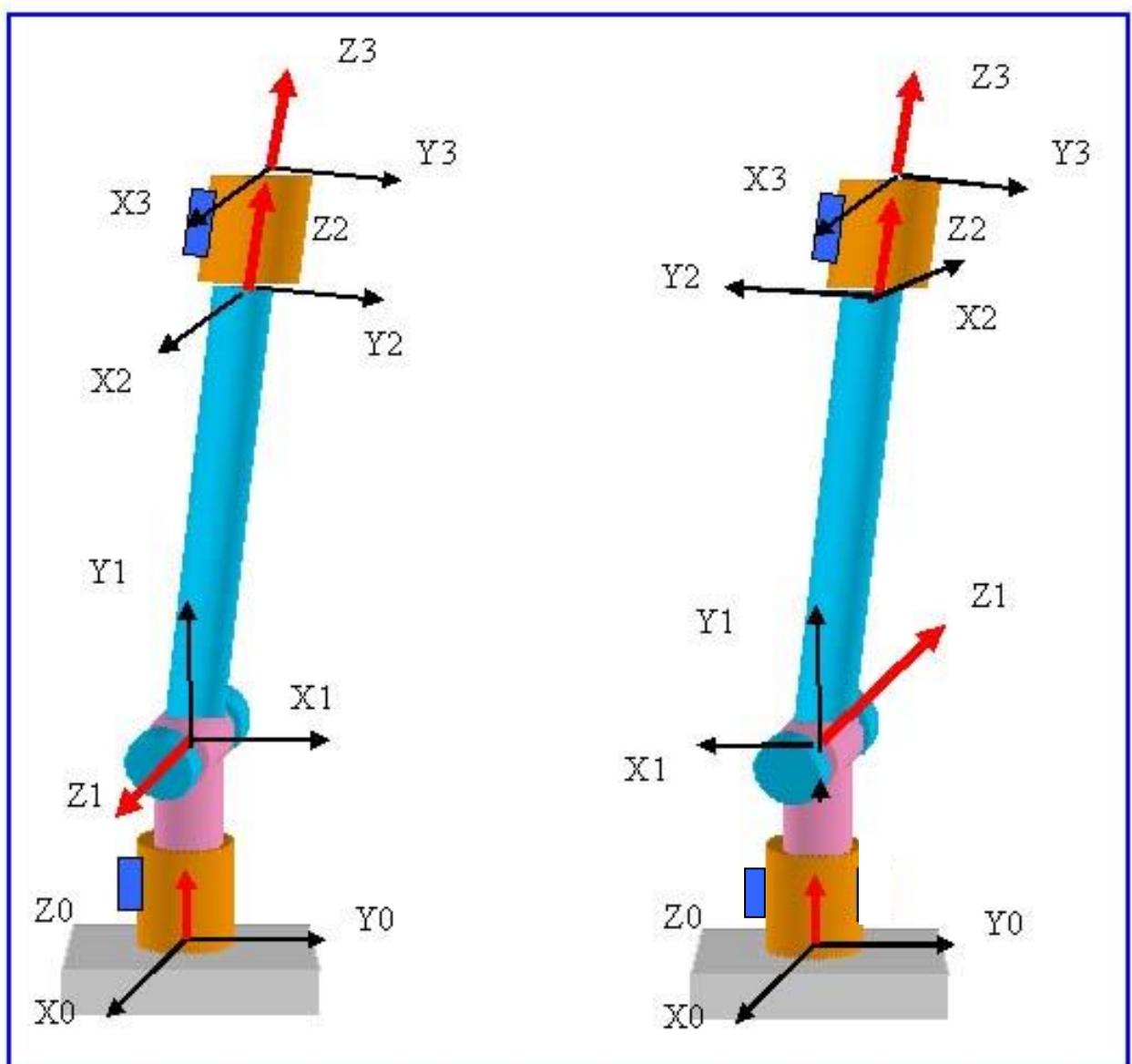


Рис.6. К решению ОКЗ

Второй случай соответствует определённым конфигурациям кинематической цепи. Для изображенного на вышеприведенном рисунке ИМ это случай соответствует случаю, когда все звенья как бы вытянуты с линию. Можно видеть, что в вытянутом положении оси Z_3 и Z_0 образуют ось вращения участка кинематической цепи между первым и третьим шарнирами. Этот участок может без ограничений вращаться вокруг своей вертикальной оси, что соответствует неограниченному множеству значений углов первого и третьего шарниров.

Третий случай связан с ограничениями рабочей зоны вследствие конструктивных ограничений возможных значений координат сочленений и геометрических параметров звеньев ИМ. Так например робот не может дотянуться до точки, расстояние до которой больше суммарной длины всех звеньев.

Для обеспечения единственности решения ОКЗ применяют специальные меры.

Траектории перемещения ЗУМ предварительно планируют (ТСУ) так, чтобы исключить выход шарниров на ограничения. При этом также исключают попадание в сингулярные положения.

Для обеспечения единственности решения ОКЗ (в «неоднозначном» случае) в рассмотрение вводятся *дополнительные параметры* (индексы конфигурации кинематической цепи - КСI), позволяющие однозначно определить значения координат шарниров. Выбор этих параметров зависит от вида кинематической схемы ИМ и алгоритма решения ОКЗ.

Для изображенного на рисунке ИМ в качестве такового удобно использовать значение величины K_s , заданной нижеследующим выражением

$$K_s = \text{sign} (Z_1 \cdot (Z_3 \times Z_0)),$$

где обозначено

Z_1, Z_3, Z_0 - единичные векторы в направлении осей Z СК₁, СК₃ и СК₀, соответственно,

· - символ скалярного, а \times - символ векторного произведения векторов.

Для рассматриваемого ИМ в положении, изображенном на рисунке 6 слева $K_s = 1$, а в положении справа, $K_s = -1$.

Введение в рассмотрение индекса конфигурации K_s удобно проиллюстрировать графически. Так, в случае $K_s = 1$ при увеличении значения координаты q_2 ЗУМ приближается к линии, проведенной вдоль вертикальной оси (плечо находится как бы "впереди" по ходу движения ЗУМ). В случае $K_s = -1$ при увеличении значения координаты q_2 ЗУМ удаляется от вертикальной линии (плечо находится как бы "сзади" по ходу движения ЗУМ).

Решение ОКЗ (рис.6).

Будем считать заданными углы ориентации (Pitch, Yaw, Roll) осей СК₃ относительно базовой СК (СК₀), а именно

Pitch = -30 град,
Yaw = Roll = 0.

Будем считать также *заданным* значение индекса конфигурации Ks:

Ks = 1.

Получим значения матрицы τ_{03} . В нашем случае роль СК {xyz} играет СК₀, а СК {uvw} – СК₃.

$\tau_{03} = \begin{pmatrix} \tau_{xyz, uvw} & \text{(ось } u\text{, угол Pitch)} \\ \tau_{xyz, uvw} & \text{(ось } v\text{, угол Yaw)} \\ \tau_{xyz, uwv} & \text{(ось } w\text{, угол Roll)} \end{pmatrix}$

$$\tau_{03} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

Последний столбец этой матрицы (обозначим его $Z_3^{(0)}$) есть вектор Z_3 , заданный в проекциях на оси СК₀, т.е. $Z_3^{(0)}$.

$$Z_3^{(0)} = (0 \ 1/2 \ \sqrt{3}/2)^T.$$

Зная Z_3 и Ks, вычислим вектор вектор Z_1 :

$$Z_1 = Ks (Z_3 \times Z_0) / |(Z_3 \times Z_0)|.$$

В координатной форме последнее выражение записывается так

$$Z_1^{(0)} = Ks \lambda(Z_3^{(0)}) Z_0^{(0)} / |(Z_3 \times Z_0)| = -Ks \lambda(Z_0^{(0)}) Z_3^{(0)} / |(Z_3 \times Z_0)|.$$

где

$\lambda(\cdot)$ - матрица векторного произведения, составленная из элементов (x y z) вектора, указанного в скобках:

$$\lambda(Z_3) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$$

$$Z_0^{(0)} = (0 \ 0 \ 1)^T.$$

$$Z_1^{(0)} = -(+1) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (0 \ \frac{1}{2} \ \sqrt{3}/2)^T = -(-\frac{1}{2} \ 0 \ 0)^T / (1/2) = (1 \ 0 \ 0)^T.$$

Вычислим угол q_1 :

$$q_1 = \operatorname{Arctg} (\sin q_1 / \cos q_1)$$

$$\cos q_1 = X_0^{(0)} \cdot Z_1^{(0)} = 1,$$

$(X_0^{(0)}$ - единичный вектор в направлении оси X СК₀ в проекциях на оси этой же СК; $X_0^{(0)} = (1 \ 0 \ 0)^T$.

$$\sin q_1 = Z_0^{(0)} \cdot \lambda (X_0^{(0)}) Z_1^{(0)} = (0 \ 0 \ 1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} (0 \ 0 \ 1)^T = (0 \ 0 \ 1) (0 \ -1 \ 0)^T = 0.$$

Отсюда

$$q_1 = 0.$$

Вычислим угол q_3 :

$$q_3 = \operatorname{Arctg} (\sin q_3 / \cos q_3)$$

$$\cos q_3 = X_3^{(0)} \cdot Z_1^{(0)}.$$

$X_3^{(0)}$ - единичный вектор в направлении оси X СК₃ в проекциях на оси СК₀; этот вектор - первый столбец матрицы τ_{03} :

$$X_3^{(0)} = (1 \ 0 \ 0)^T.$$

$$\cos q_3 = X_3^{(0)} \cdot Z_1^{(0)} = (1 \ 0 \ 0) (1 \ 0 \ 0)^T = 1.$$

$$\sin q_3 = Z_3^{(0)} \cdot (\lambda (Z_1^{(0)}) \times X_3^{(0)}) = (0 \ 1/2 \ \sqrt{3}/2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (1 \ 0 \ 0)^T = 0.$$

Отсюда

$$q_3 = 0.$$

Вычислим угол q_2 .

$$q_2 = \operatorname{Arctg} (\sin q_2 / \cos q_2)$$

$$\cos q_3 = Z_0^{(0)} \cdot Z_3^{(0)} = (0 \ 0 \ 1) (0 \ \frac{1}{2} \ \sqrt{3}/2)^T = \sqrt{3}/2.$$

$$\sin q_3 = Z_1^{(0)} \cdot (\lambda(Z_0^{(0)}) Z_3^{(0)}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{2}.$$

$q_2 = -30$ град.

Отметим, что в общем случае решение ОКЗ требует задания помимо углов ориентации, координат точки $t_{3(0)}^{(0)}$ начала СКЗ. Однако в данном случае в силу ограниченности числа степеней свободы ИМ, достаточно задать только параметры ориентации. В данном примере решение ОКЗ можно получить, задав только линейные координаты ЗУМ. Последовательность вычислений при этом останется прежней с той лишь разницей, что вектор $Z_3^{(0)}$ следует вычислить как единичный вектор в направлении линии, связывающей начала 1-й и 3-й СК.

2.4.1 Сингулярности ОКЗ

Из формулы для расчета Z_1 видно, что при коллинеарном расположении векторов Z_3 и Z_0 векторное произведение $Z_3 \times Z_0$ становится неопределенным. Это значит, что в этом случае вектор Z_1 может иметь бесчисленное множество значений. Вследствие этого решение ОКЗ также становится неопределенным. Положения ИМ в пространстве, которым соответствует бесчисленное множество значений координат сочленений называются сингулярными.

При управлении манипуляторами МР предпринимаются специальные меры, исключающие сингулярные конфигурации ИМ.

2.4.2 Обратная кинематическая задача в управлении манипулятором

Необходимость решения ОКЗ возникает в связи с тем, что законы движения манипулятора (ЗУМ манипулятора) чаще всего задают в пространстве декартовых координат, а реальное движение ИМ обеспечивается работой приводов шарниров. Эта задача системы управления тактического уровня.

В ТСУ поступает информация о заданных декартовых координатах ЗУМ. Основываясь на них, а также геометрических параметрах звеньев ИМ при заданных значениях индексов конфигурации производится расчет заданных координат шарниров.

ЛЕКЦИЯ 5

2.4.2 Обратная кинематическая задача в управлении манипулятором (продолжение)

Мы убедились в том, что преодолеть «проблему сингулярности» ОКЗ можно, если ввести в рассмотрение дополнительные параметры – в нашем случае – KCI. Количество KCI, способ их выбора (формул для их расчета) зависит от кинематической схемы ИМ и может быть разным для разных МР. К примеру, для МР ERA, промышленного робота Kawasaki количество KCI, необходимых для преодоления «проблемы» сингулярностей равно 3.

На предыдущей лекции мы рассмотрели один из способов выбора KCI, их формального описания и расчета для простейшего трехзвенного ИМ.

Рассмотрим теперь особенность решения ОКЗ в случае, когда траектория ЗУМ МР содержит сингулярную точку. В рассмотренном примере эта точка соответствует конфигурации, когда векторы осей Z_0 и Z_3 выстраиваются в одну линию. При этом

$$(Z_3 \times Z_0) = [0 \ 0 \ 0]^T, \quad |(Z_3 \times Z_0)| = 0, \quad K_s = \text{sign}(Z_1 \cdot (Z_3 \times Z_0)) = 0.$$

(Принимаем условие $\text{sign} 0 = 0$).

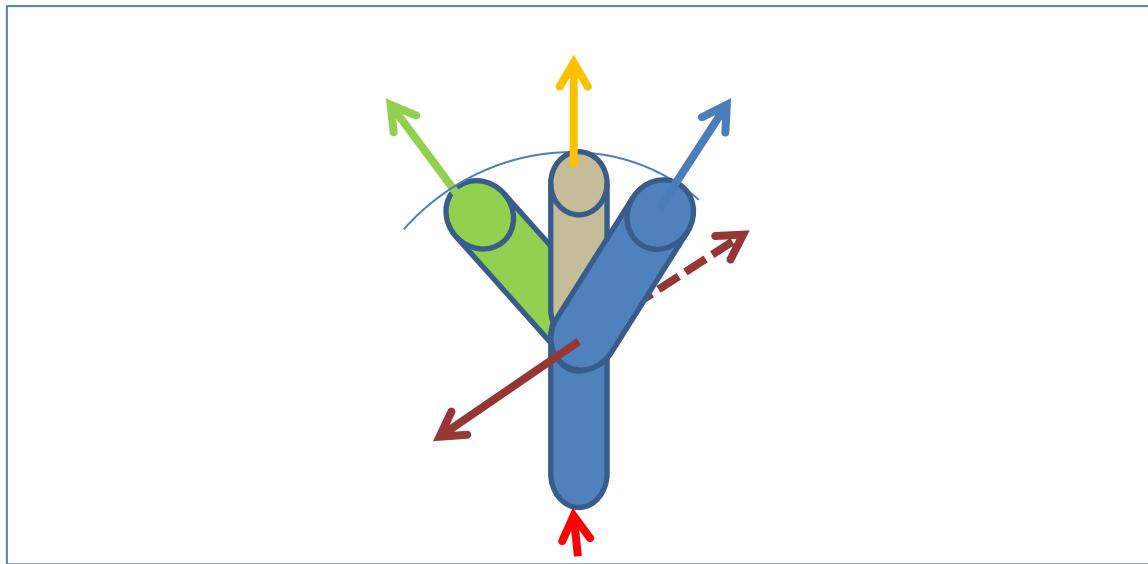


Рис.1.

Схематично, траектория изображена на рис.1. МР движется «справа налево», пересекая вертикальную линию. Разными цветами обозначены оси Z_0 (красная), Z_3 (синяя, желтая, зеленая), Z_1 (коричневая, сплошная и

пунктирная). Значения угла P_3 справа $P_3 = -30^\circ$, в центре $P_3 = 0^\circ$, слева $P_3 = 30^\circ$.

$$\text{Матрица } \tau_{03} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad (\text{справа}) \quad Z_3^{(0)} = (0 \ 1/2 \ \sqrt{3}/2)^T$$

$$\tau_{03} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad (\text{слева}) \quad Z_3^{(0)} = (0 \ -1/2 \ \sqrt{3}/2)^T$$

$$\tau_{03} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{в центре}) \quad Z_3^{(0)} = (0 \ 0 \ 1)^T$$

Если принять $K_s = 1$ и оставить его неизменным на всей траектории, получим

$Z_1^{(0)} = (1 \ 0 \ 0)^T$ справа (коричневая сплошная),

$Z_1^{(0)} = (-1 \ 0 \ 0)^T$ слева (коричневая пунктирная),

что соответствует повороту в сочленениях 1 и 3 на 180° . В общем случае это неприемлемо.

В центре $K_s = 0$, что соответствует сингулярной конфигурации.

В целях исключения сингулярных конфигураций при управлении МР в декартовом пространстве оператор (или автоматика ТСУ) МР следит за приближением к сингулярной конфигурации (по значению $|Z_3 \times Z_0|$). Если

$|Z_3 \times Z_0|$ становится малым, осуществляется переход в управление МР по-шарнирно (в данном случае «вручную» изменяют угол q_2). После прохождения сингулярной конфигурации вновь переходят в автоматический режим, но при этом решение ОКЗ производят при значении $K_s = -1$.

2.5. Однородные координаты и однородные преобразования в робототехнике

В робототехнике широкое распространение получили т.н. однородные координаты.

Смысл однородных координат состоит в следующем.

Если $t_{i(i)}^{(i)}$ – вектор координат некоторой точки относительно начала СК_i, то координаты этой же точки относительно начала координат СК_{i-1}, т.е. вектор $t_{i(i-1)}^{(i-1)}$ может быть вычислен так

$$t_{i(i-1)}^{(i-1)} = \tau_{i-1 i} (t_{i(i)}^{(i)} + L_i).$$

Вспоминаем, что

$$L_i = v_i (1 - \sigma_i) q_i + l_i$$

Пусть теперь

$\underline{t}_{i(i-1)}^{(i-1)} = (t_{i(i-1)}^{(i-1)} \ 1)^T$ – вектор, составленный из компонент $t_{i(i-1)}^{(i-1)}$, к которым добавлена 1 на месте 4-го элемента.

Аналогично составим 4-мерный вектор \underline{t}_i

Составим теперь матрицу (4x4)

$$\begin{matrix} {}^{i-1}T_i &= & \tau_{i-1 i} & \tau_{i-1 i} L_i \\ && 0 & 1 \end{matrix}$$

В ней $\tau_{i-1 i} L_i = L_i^{(i-1)}$.

Принимая во внимание, что

$$\underline{t}_i = (t_i \ 1)^T,$$

нетрудно видеть,

$$\underline{t}_{i(i-1)}^{(i-1)} = {}^{i-1}T_i \underline{t}_i$$

и матрица ${}^{i-1}T_i$ задает сразу два преобразования – поворот (матрица $\tau_{i-1 i}$) и перенос – вектор $\tau_{i-1 i} L_i^{(i)}$.

4-мерные векторы вида $\underline{t}_{i(i)}^{(i)}$, определяющие линейные координаты звеньев, получили название однородных координат, а матрицы (4x4), вида ${}^{i-1}T_i$, описывающие преобразование однородных векторов – матрицам однородных преобразований.

Матрицы однородных преобразований позволяют одним действием описать и операции поворота (перемножение матриц поворота СК смежных звеньев) и операции переноса.

При этом сохраняются правила перемножения, действующие по отношению к матрицам (3x3).

С использованием матриц однородных преобразований координаты точки $\underline{t}_{-i}^{(i)}$ относительно инерциальной системы, т.е. $\underline{t}_{-i}^{(0)}$ можно представить в виде

$$\underline{t}_{-i}^{(0)} = \prod_{j=1}^i {}^{i-1}T_i \underline{t}_i,$$

причем в матрице ${}^{i-1}T_i$ отдельные элементы имеют вид

$${}^0T_i = \begin{matrix} & & i \\ & \tau_{0i} & \sum_{j=1}^i \tau_{0j} L_j \\ 0 & & 1 \end{matrix}$$

и образуются в результате перемножения матриц ${}^0T_1 {}^1T_2 \dots {}^{i-1}T_i$.

Матрицы ${}^{i-1}T_i$ являются блочными. По отношению к ним действует правило поблочного перемножения, т.е. при перемножении можно перемножать и суммировать не только отельные элементы (так тоже можно), но и блоки матриц. Всего в одной матрице ${}^{i-1}T_i$ четыре блока: $\tau_{i-1 i}$, $\tau_{i-1 i} L_i$, $[0 0 0]$ и 1.

Полученное выражение для $\underline{t}_{-i}^{(0)}$ является аналогом выражений

$$\begin{aligned} t_{i(0)}^{(0)} &= \tau_{0i} t_i + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} L_j \\ \tau_{0j} &= \prod_{k=1}^j \tau_{k-1 k}, \end{aligned}$$

и отличается от них более компактной записью (и только!).

В самом деле:

$$\begin{aligned} {}^0T_i &= (\tau_{01} \quad \tau_{01} L_1) \quad (\tau_{12} \quad \tau_{12} L_2) \quad \dots \quad (\tau_{i-1 i} \quad \tau_{i-1 i} L_i) = \left(\begin{matrix} & & i \\ \tau_{0i} & \sum_{j=1}^i \tau_{0j} L_j & \end{matrix} \right) \\ &(0 \quad 1) \quad (0 \quad 1) \dots \quad (0 \quad 1) \quad (0 \quad 1) \end{aligned}$$

ЛЕКЦИЯ 6

2.7 Специальные системы координат

Денавит и Хартенберг (*Denavit J., Hartenberg R.S.*) в 1955 г предложили такой способ выбора систем координат (СК Д-Х), когда:

- этот выбор происходит однозначно,
- число параметров, определяющих взаимное расположение двух смежных СК равно только 4 (вместо 6-7 применяемых в общем случае).

Построение СК Д-Х включает определенную последовательность действий по выбору начал СК и их осей (рис. ниже):

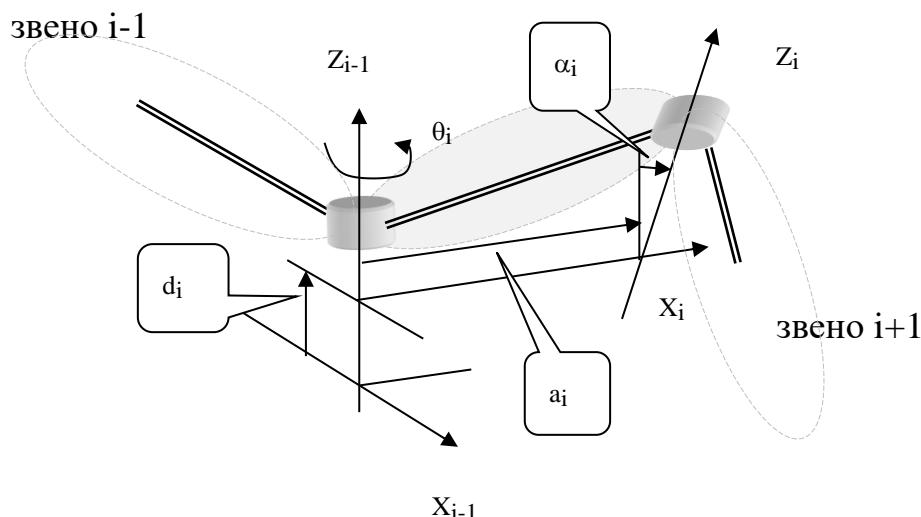


Рис.2.2. Параметры Денавита-Хартенберга

При использовании СК Д-Х с каждым звеном связаны 4 параметра: d_i , θ_i , α_i и a_i .

Эти параметры соответствуют параметрам звена (α_i и a_i) и сочленения (d_i , θ_i). Параметры сочленения характеризуют относительное положение смежных звеньев.

Способ выбора СК по Д-Х формализован и включает 12 действий.

Д1. Формирование базовой СК. Сформировать правую ортонормированную СК₀, связанную с основанием, направив ось Z_0 вдоль оси 1-го шарнира к плечу манипулятора. Оси X_0 и Y_0 – произвольно, перпендикулярно оси Z_0 .

Д2. Начало и цикл. Для всех i ($i=1,2,\dots,n-1$) выполнить шаги Д3-Д6.

Д3. Формирование осей сочленений. Направить ось Z_i вдоль оси движения (вращательного или поступательного) $i+1$ -го сочленения. Для роботов с манипуляторами, имеющими конфигурацию левой-правой руки, оси Z_1 и Z_2 направлены от плеча и общего направления манипулятора.

Д4. Формирование начала i-й СК. Расположить начало i-й СК на пересечении осей Z_i и Z_{i-1} или на пересечении общей нормали к осям Z_i и Z_{i-1} с осью Z_i .

Д5. Формирование оси X_i . Выбрать единичный вектор X_i следующим образом: $X_i = \pm (Z_{i-1} \times Z_i) / |Z_{i-1} \times Z_i|$ или вдоль общего перпендикуляра к осям Z_{i-1} и Z_i , если они параллельны.

Д6. Формирование оси Y_i . Положить Y_i , чтобы образовать провостороннюю СК. (Продолжить оси Z_i и X_i , если это необходимо для шагов Д9 – Д12).

Д7. Формирование СК схвата. Как правило, n-е сочленение является вращательным. Сформировать ось Z_n , направив ее вдоль оси Z_{n-1} и от робота. Выбрать ось X_n так, чтобы она была перпендикулярна осям Z_{n-1} и Z_n . Ось Y_n дополняет систему до правой тройки.

Д8. Определение параметров звеньев. Для каждого i ($i=1,2,\dots,n$) выполнить шаги Д9-Д12.

Д9. Определение d_i . d_i есть расстояние от начала i-1 СК до пересечения оси Z_{i-1} с осью X_i , отсчитываемое вдоль оси Z_{i-1} . Если i-е сочленение – поступательное ($\sigma_i = 0$), то d_i – присоединенная переменная (координата шарнира). Если нет ($\sigma_i = 1$), то $d_i = \text{const}$.

Д10. Определение a_i . a_i – расстояние между пересечением оси Z_{i-1} с осью X_i и началом i-й СК, отсчитываемое вдоль оси X_i .

Д11. Определение θ_i . θ_i – угол, на который нужно повернуть ось X_{i-1} вокруг оси Z_{i-1} , чтобы она стала сонаправлена с осью X_i . Если i-е сочленение – вращательное ($\sigma_i = 1$), то θ_i – присоединенная переменная. Если i-е сочленение – поступательное ($\sigma_i = 0$), $\theta_i = \text{const}$.

Д12. Определение α_i . α_i – угол, на который нужно повернуть ось Z_{i-1} вокруг оси X_i , чтобы она стала сонаправлена с осью Z_i .

Как только СК Д-Х сформированы, можно определить и матрицу однородного преобразования СК смежных звеньев:

$${}^{i-1}T_i = \begin{pmatrix} \tau_{i-1 \ i} & \tau_{i-1 \ i} L_i \\ [0 \ 0 \ 0] & 1 \end{pmatrix}$$

Здесь

$$\tau_{i-1 \ i} = \tau_z(\theta_i) \tau_x(\alpha_i), \text{ причем } \theta_i = q_i(t) = \text{var}, \text{ если КП}_i - \text{вращательная} \\ \theta_i = \text{const}, \quad \text{если КП}_i - \text{поступательная}$$

– матрица поворота СК смежных звеньев (CK_i относительно CK_{i-1}),

$$\tau_{i-1 \ i} L_i^{(i)} = L_i^{(i-1)} = d_i + \tau_z(\theta_i) \tau_x(\alpha_i) (a_i \ 0 \ 0)^T = e d_i + \tau_z(\theta_i) (a_i \ 0 \ 0)^T$$

- вектор смещения CK_i относительно CK_{i-1} ,

причем $\theta_i = q_i(t) = \text{var}$, $d_i = \text{const}$, если КП_i – вращательная
 $\theta_i = \text{const}$, $d_i = q_i(t) = \text{var}$, если КП_i – поступательная

Достоинство СК Д-Х – формализация процедуры выбора СК звеньев. Это полезно, например, при написании статей – нет необходимости дополнительно описывать и комментировать действия по выбору СК манипулятора. Однако, в силу такой формализации, пользователь лишен возможности располагать начала и оси X и Y СК звеньев произвольным образом. В этой связи, зачастую, при построении СК, начала систем координат могут расположиться вне шарниров манипулятора. Это приводит к тому, что определенные с использованием метода Д-Х координаты сочленений теряют физический смысл.

3. Угловые и линейные скорости звеньев ИМ

3.1. Угловые скорости звеньев ИМ

Учитывая, что смежные звенья ИМ могут вращаться (или перемещаться) в направлении только одной оси, нетрудно записать соотношения для определения векторов относительных скоростей вращения звеньев. Вектор угловой скорости вращения звена i относительно звена i-1 в проекциях на оси СК_{i-1} запишется так:

$$\bar{\omega}_i^{(i-1)} = e\sigma_i \dot{q}_i^{\wedge}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где \dot{q}_i^{\wedge} – производная по времени координаты q_i (символ $\bar{\omega}$ имеет «крышку» в случае, если он применяется для записи *относительной* скорости вращения звеньев; вектор *полной* угловой скорости записывается «без крышки», а именно, ω).

Замечание. В случае, когда в записи вектора скорости используется один верхний и один нижний индекс, соответствует случаю рассмотрения вектора, заданного в СК с номером «нижний индекс», в проекциях на оси СК с номером «верхний индекс». Ситуация с одним нижним индексом – случаю рассмотрения вектора в проекциях на оси СК «нижний индекс».

Вектор угловой скорости $\bar{\omega}_i^{(0)}$ (в проекциях на оси СК₀) запишется так:

$$\bar{\omega}_i^{(0)} = \tau_{0i} v_i \sigma_i \dot{q}_i^{\wedge}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

Каждое последующее звено ИМ участвует во вращении всех предыдущих. Поэтому, обозначив ω_i – вектор угловой скорости звена i, можем записать:

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \bar{\omega}_j^{(0)} = \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \bar{\omega}_j$$

или в развернутой форме записи

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j^{\circ}.$$

Введем обозначения

$$c_j^{(0)} = \tau_{0j} v_j \sigma_j.$$

Тогда соотношения для расчета $\omega_i^{(0)}$ можно переписать так:

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i c_j^{(0)} q_j^{\circ},$$

Очевидно $c_j^{(0)}$ – векторы размера (3x1).

3.2. Свойства векторов $c_j^{(0)}$.

- a) С учетом того, что v_j – это вектор проекций оси Z_{j-1} на оси СК_j следует, что $c_j^{(0)}$ – орт оси Z_{j-1} , спроектированный на оси СК₀.
- б) $c_j^{(0)} = 0$ когда $j = [ПП]$ – следует непосредственно из того, что в соответствующее выражение входит σ_j .
- в) Поскольку $c_j^{(0)}$ – проекции единичного вектора на оси различных СК,

$$| (c_j^{(0)}) | = 1,$$

если $j = [ВП]$.

3.3. Матрицы-якобианы угловых скоростей ИМ.

Обозначим $q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T$ – вектор, составленный из обобщенных (присоединенных) координат ИМ и назовем его вектором обобщенных (присоединенных) координат ИМ.

Из выражений для $\omega_i^{(0)}$ следует

$$\omega_n^{(0)} = C_n^{(0)} q^{\circ}$$

где

$$C_n^{(0)} = [c_1^{(0)} \ c_2^{(0)} \ \dots \ c_n^{(0)}],$$

матрица, составленная из векторов $c_j^{(0)}$; размер матрицы $C_n^{(0)}$ - (3xn).

Матрица $C_n^{(0)}$ линейно связывает между собой векторы производных по времени обобщенных координат ИМ и вектор угловой скорости

последнего (n-го) звена ИМ и носит название матрицы-якобиана угловых скоростей ИМ. Чаще всего рассматривают матрицы-якобианы последнего звена ИМ.

Аналогично можно построить матрицу-якобиан $C_i^{(0)}$ для любых других звеньев ИМ.

Важным является то, что с помощью этих матриц можно, зная производные по времени обобщенных координат ИМ (скоростей вращения шарниров), определить угловую скорость любого звена ИМ.

Зная $c_i^{(0)}$, можно составить блочные матрицы $C^{(0)}$, в которых матрицы $c_i^{(0)}$ будут представлены (блочными) строками размера $(3 \times n)$ с соответствующими номерами. Размер блочных матриц – $(3n \times n)$.

С использованием таких блочных матриц можно записать выражения для расчета угловых скоростей сразу всех звеньев ИМ:

$$\omega^{(0)} = C^{(0)} q^{\dot{}} ,$$

где

$$\omega^{(0)} = [\omega_1^{(0)T} \omega_2^{(0)T} \dots \omega_n^{(0)T}]^T .$$

Элементы блочных матриц $C^{(0)} = \{c_i^{(0)}\}$ – векторы $c_j^{(0)}$.

Элементы блочной матрицы $C^{(0)}$ следует принять равными нулю при $j > i$.

Блочная матрица $C^{(0)}$ называется матрицией-якобиана угловых скоростей ИМ.

3.4. Производные по времени матриц преобразований поворота.

3.4.1. Запись производной по времени матрицы τ_{i-1i}

Матрица $\tau_{i-1i}^{\dot{}}$ равна

$$\tau_{i-1i}^{\dot{}} = \tau_{i-1i} \lambda(\bar{\omega}_i),$$

где обозначено $\lambda(*)$ – матрица (3×3) векторного произведения, составленная из элементов вектора

$$* = \{*_x \ *_y \ *_z\}^T :$$

$$\lambda(.) = \begin{vmatrix} 0 & -*_z & *_y \\ *_z & 0 & -*_x \\ -*_y & *_x & 0 \end{vmatrix}$$

Матрица используется при записи векторного произведения в координатной форме.

3.4.2. Свойства матрицы векторного произведения $\lambda(.)$

a) $\lambda^T(.) = -\lambda(.)$; следует из того, что $\lambda(.)$ – кососимметрическая матрица.

б) Если \mathbf{a}, \mathbf{b} – 3-мерные векторы, то векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в координатной форме записи равно $\lambda(\mathbf{a})\mathbf{b}$, что непосредственно следует из свойств векторного произведения.

в) $\lambda(\mathbf{a})\mathbf{b} = -\lambda(\mathbf{b})\mathbf{a}$; непосредственно следует из свойств векторного произведения.

г) $\lambda(\mathbf{a}^{(i)})\mathbf{b}^{(i)} = \tau_{ij} [\lambda(\mathbf{a}^{(j)})\mathbf{b}^{(j)}] = [\lambda(\tau_{ij} \mathbf{a}^{(j)})] [\tau_{ij} \mathbf{b}^{(j)}]$; следует из свойств векторного произведения: результат векторного произведения не зависит от СК, в которой оно выполнено. Представленные соотношения (квадратными скобками) можно переписать иначе:

$$\lambda(\mathbf{a}^{(j)})\mathbf{b}^{(j)} = \tau_{ij}^T \lambda(\tau_{ij} \mathbf{a}^{(j)}) \tau_{ij} \mathbf{b}^{(j)}.$$

Поскольку представленные соотношения справедливы для любого вектора $\mathbf{b}^{(j)}$, $\mathbf{b}^{(j)}$ можно опустить:

$$\lambda(\mathbf{a}^{(j)}) = \tau_{ij}^T \lambda(\tau_{ij} \mathbf{a}^{(j)}) \tau_{ij}.$$

Последнее выражение можно переписать так

$$\lambda(\tau_{ij} \mathbf{a}^{(j)}) = \tau_{ij} \lambda(\mathbf{a}^{(j)}) \tau_{ij}^T,$$

д) $\lambda\left(\sum_{k=1}^i \mathbf{a}_k^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^i \lambda(\mathbf{a}_k^{(j)})$. Это соотношение очевидно.

3.4.3. Вычисление τ_{i-1i} .

В справедливости выражений п.3.4.1 нетрудно убедиться, выполнив предписанные ими действия:

$$\begin{aligned} \tau_{i-1i} &= \tau_z (\sigma_i q_i) \varepsilon_i = (d \\ &\quad | \cos(\sigma_i q_i) \quad -\sin(\sigma_i q_i) \quad 0 | \\ &\quad | \sin(\sigma_i q_i) \quad \cos(\sigma_i q_i) \quad 0 | / dt) \varepsilon_i = \\ &\quad | 0 \quad 0 \quad 1 | \\ &| -\sin(\sigma_i q_i) \quad -\cos(\sigma_i q_i) \quad 0 | \quad | \cos(\sigma_i q_i) \quad -\sin(\sigma_i q_i) \quad 0 | \quad | 0 \quad -1 \quad 0 | \\ &| \cos(\sigma_i q_i) \quad -\sin(\sigma_i q_i) \quad 0 | \quad | \sin(\sigma_i q_i) \quad \cos(\sigma_i q_i) \quad 0 | \quad | 1 \quad 0 \quad 0 | \\ &| 0 \quad 0 \quad 0 | \quad | 0 \quad 0 \quad 0 | \quad | \varepsilon_i \quad \sigma_i q_i | = \end{aligned}$$

$$\tau_z(\sigma_i q_i) \lambda(e) \varepsilon_i \sigma_i q_i = \tau_z(\sigma_i q_i) \lambda(\varepsilon_i (\varepsilon_i^T e)) \varepsilon_i \sigma_i q_i = \tau_z(\sigma_i q_i) \lambda(\varepsilon_i v_i) \varepsilon_i \sigma_i q_i =$$

$$\tau_z(\sigma_i q_i) \varepsilon_i \lambda(v_i) \varepsilon_i^T \varepsilon_i \sigma_i q_i = \tau_z(\sigma_i q_i) \varepsilon_i \lambda(v_i) \varepsilon_i^T \varepsilon_i \sigma_i q_i = \tau_z(\sigma_i q_i) \varepsilon_i \lambda(v_i \sigma_i q_i) = \tau_{i-1i} \lambda(\varpi_i).$$

Итак, $\tau_{i-1i} = \tau_{i-1i} \lambda(\varpi_i)$.

ЛЕКЦИЯ 6

2.7 Специальные системы координат

Денавит и Хартенберг (*Denavit J., Hartenberg R.S.*) в 1955 г предложили такой способ выбора систем координат (СК Д-Х), когда:

- этот выбор происходит однозначно,
- число параметров, определяющих взаимное расположение двух смежных СК равно только 4 (вместо 6-7 применяемых в общем случае).

Построение СК Д-Х включает определенную последовательность действий по выбору начал СК и их осей (рис. ниже):

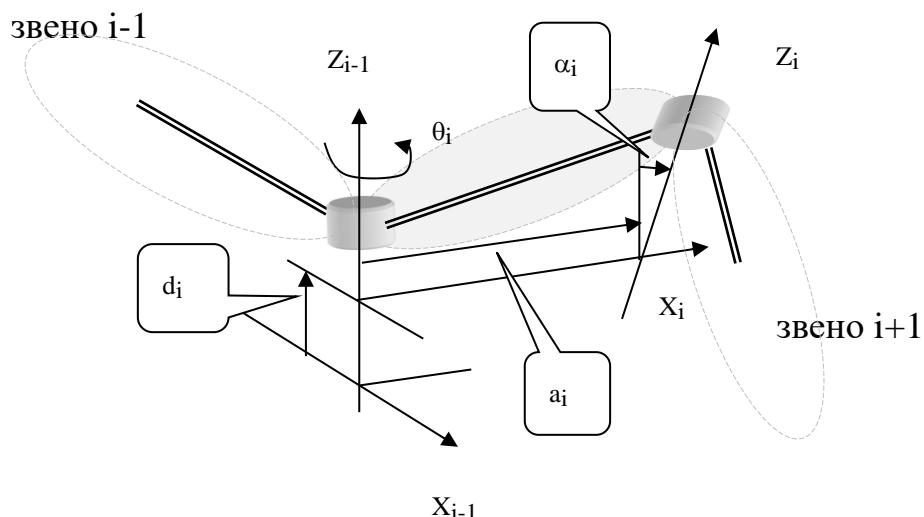


Рис.2.2. Параметры Денавита-Хартенберга

При использовании СК Д-Х с каждым звеном связаны 4 параметра: d_i , θ_i , α_i и a_i .

Эти параметры соответствуют параметрам звена (α_i и a_i) и сочленения (d_i , θ_i). Параметры сочленения характеризуют относительное положение смежных звеньев.

Способ выбора СК по Д-Х формализован и включает 12 действий.

Д1. Формирование базовой СК. Сформировать правую ортонормированную СК₀, связанную с основанием, направив ось Z_0 вдоль оси 1-го шарнира к плечу манипулятора. Оси X_0 и Y_0 – произвольно, перпендикулярно оси Z_0 .

Д2. Начало и цикл. Для всех i ($i=1,2,\dots,n-1$) выполнить шаги Д3-Д6.

Д3. Формирование осей сочленений. Направить ось Z_i вдоль оси движения (вращательного или поступательного) $i+1$ -го сочленения. Для роботов с манипуляторами, имеющими конфигурацию левой-правой руки, оси Z_1 и Z_2 направлены от плеча и общего направления манипулятора.

Д4. Формирование начала i-й СК. Расположить начало i-й СК на пересечении осей Z_i и Z_{i-1} или на пересечении общей нормали к осям Z_i и Z_{i-1} с осью Z_i .

Д5. Формирование оси X_i . Выбрать единичный вектор X_i следующим образом: $X_i = +-(Z_{i-1} \times Z_i) / |Z_{i-1} \times Z_i|$ или вдоль общего перпендикуляра к осям Z_{i-1} и Z_i , если они параллельны.

Д6. Формирование оси Y_i . Положить Y_i , чтобы образовать провостороннюю СК. (Продолжить оси Z_i и X_i , если это необходимо для шагов Д9 – Д12).

Д7. Формирование СК схвата. Как правило, n-е сочленение является вращательным. Сформировать ось Z_n , направив ее вдоль оси Z_{n-1} и от робота. Выбрать ось X_n так, чтобы она была перпендикулярна осям Z_{n-1} и Z_n . Ось Y_n дополняет систему до правой тройки.

Д8. Определение параметров звеньев. Для каждого i ($i=1,2,\dots,n$) выполнить шаги Д9-Д12.

Д9. Определение d_i . d_i есть расстояние от начала i-1 СК до пересечения оси Z_{i-1} с осью X_i , отсчитываемое вдоль оси Z_{i-1} . Если i-е сочленение – поступательное ($\sigma_i = 0$), то d_i – присоединенная переменная (координата шарнира). Если нет ($\sigma_i = 1$), то $d_i = \text{const}$.

Д10. Определение a_i . a_i – расстояние между пересечением оси Z_{i-1} с осью X_i и началом i-й СК, отсчитываемое вдоль оси X_i .

Д11. Определение θ_i . θ_i – угол, на который нужно повернуть ось X_{i-1} вокруг оси Z_{i-1} , чтобы она стала сонаправлена с осью X_i . Если i-е сочленение – вращательное ($\sigma_i = 1$), то θ_i – присоединенная переменная. Если i-е сочленение – поступательное ($\sigma_i = 0$), $\theta_i = \text{const}$.

Д12. Определение α_i . α_i – угол, на который нужно повернуть ось Z_{i-1} вокруг оси X_i , чтобы она стала сонаправлена с осью Z_i .

Как только СК Д-Х сформированы, можно определить и матрицу однородного преобразования СК смежных звеньев:

$${}^{i-1}T_i = (\tau_{i-1 \ i} \quad \tau_{i-1 \ i} L_i) \\ ([0 \ 0 \ 0] \quad 1).$$

Здесь

$$\tau_{i-1 \ i} = \tau_z(\theta_i) \ \tau_x(\alpha_i), \text{ причем } \theta_i = q_i(t) = \text{var}, \text{ если КП}_i \text{ – вращательная} \\ \theta_i = \text{const}, \quad \text{если КП}_i \text{ – поступательная}$$

– матрица поворота СК смежных звеньев (СК_i относительно СК_{i-1}),

$$\tau_{i-1 \ i} L_i^{(i)} = L_i^{(i-1)} = d_i + \tau_z(\theta_i) \ \tau_x(\alpha_i) \ (a_i \ 0 \ 0)^T = e d_i + \tau_z(\theta_i) \ (a_i \ 0 \ 0)^T$$

- вектор смещения СК_i относительно СК_{i-1},

причем $\theta_i = q_i(t) = \text{var}$, $d_i = \text{const}$, если КП_i – вращательная
 $\theta_i = \text{const}$, $d_i = q_i(t) = \text{var}$, если КП_i – поступательная

Достоинство СК Д-Х – формализация процедуры выбора СК звеньев. Это полезно, например, при написании статей – нет необходимости дополнительно описывать и комментировать действия по выбору СК манипулятора. Однако, в силу такой формализации, пользователь лишен возможности располагать начала и оси X и Y СК звеньев произвольным образом. В этой связи, зачастую, при построении СК, начала систем координат могут расположиться вне шарниров манипулятора. Это приводит к тому, что определенные с использованием метода Д-Х координаты сочленений теряют физический смысл. При реальных этом конструктивные параметры звеньев, как правило, не совпадают с координатами Д-Х, что затрудняет вычисление реальных конструктивных параметров МР.

3. Угловые и линейные скорости звеньев ИМ

3.1. Угловые скорости звеньев ИМ

Учитывая, что смежные звенья ИМ могут вращаться (или перемещаться) в направлении только одной оси, нетрудно записать соотношения для определения векторов относительных скоростей вращения звеньев. Вектор угловой скорости вращения звена i относительно звена $i-1$ в проекциях на оси СК_{i-1} запишется так:

$$\bar{\omega}_i^{(i-1)} = e\sigma_i \dot{q}_i^{\circ}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где \dot{q}_i° – производная по времени координаты q_i (символ $\bar{\omega}$ имеет «крышку» в случае, если он применяется для записи *относительной* скорости вращения звеньев; вектор *полной* угловой скорости записывается «без крышки», а именно, ω).

Замечание. В случае, когда в записи вектора скорости используется один верхний и один нижний индекс, соответствует случаю рассмотрения вектора, заданного в СК с номером «нижний индекс», в проекциях на оси СК с номером «верхний индекс». Ситуация с одним нижним индексом – случаю рассмотрения вектора в проекциях на оси СК «нижний индекс».

Вектор угловой скорости $\bar{\omega}_i^{(0)}$ (в проекциях на оси СК₀) запишется так:

$$\bar{\omega}_i^{(0)} = \tau_{0i} v_i \sigma_i \dot{q}_i^{\circ}, \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

Каждое последующее звено ИМ участвует во вращении всех предыдущих. Поэтому, обозначив ω_i – вектор угловой скорости звена i , можем записать:

$$i \quad i$$

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^n \varpi_j^{(0)} = \sum_{j=1} \tau_{0j} \varpi_j$$

или в развернутой форме записи

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j.$$

$$j=1$$

Введем обозначения

$$c_j^{(0)} = \tau_{0j} v_j \sigma_j.$$

Тогда соотношения для расчета $\omega_i^{(0)}$ можно переписать так:

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i c_j^{(0)} q_j,$$

Очевидно $c_j^{(0)}$ – векторы размера (3x1).

3.2. Свойства векторов $c_j^{(0)}$.

а) С учетом того, что v_j – это вектор проекций оси Z_{j-1} на оси СК_j следует, что $c_j^{(0)}$ – орт оси Z_{j-1} , спроектированный на оси СК₀.

б) $c_j^{(0)} = 0$ когда $j = [ПП]$ – следует непосредственно из того, что в соответствующее выражение входит σ_j .

в) Поскольку $c_j^{(0)}$ – проекции единичного вектора на оси различных СК,

$$| (c_j^{(0)}) | = 1,$$

если $j = [ВП]$.

3.3. Матрицы-якобианы угловых скоростей ИМ.

Обозначим $q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}^T$ – вектор, составленный из обобщенных (присоединенных) координат ИМ и назовем его вектором обобщенных (присоединенных) координат ИМ.

Из выражений для $\omega_i^{(0)}$ следует

$$\omega_n^{(0)} = C_n^{(0)} q$$

где

$$C_n^{(0)} = [c_1^{(0)} \ c_2^{(0)} \ \dots \ c_n^{(0)}],$$

матрица, составленная из векторов $c_j^{(0)}$; размер матрицы $C_n^{(0)}$ - (3xn).

Матрица $C_n^{(0)}$ линейно связывает между собой векторы производных по времени обобщенных координат ИМ и вектор угловой скорости последнего (n-го) звена ИМ и носит название матрицы-якобиана угловых скоростей ИМ. Чаще всего рассматривают матрицы-якобианы последнего звена ИМ.

Аналогично можно построить матрицу-якобиан $C_i^{(0)}$ для любых других звеньев ИМ.

Важным является то, что с помощью этих матриц можно, зная производные по времени обобщенных координат ИМ (скоростей вращения шарниров), определить угловую скорость любого звена ИМ.

Зная $c_i^{(0)}$, можно составить блочные матрицы $C^{(0)}$, в которых матрицы $c_i^{(0)}$ будут представлены (блочными) строками размера $(3 \times n)$ с соответствующими номерами. Размер блочных матриц – $(3n \times n)$.

С использованием таких блочных матриц можно записать выражения для расчета угловых скоростей сразу всех звеньев ИМ:

$$\omega^{(0)} = C^{(0)} q^{\dot{}} ,$$

где

$$\omega^{(0)} = [\omega_1^{(0)T} \ \omega_2^{(0)T} \ \dots \ \omega_n^{(0)T}]^T .$$

Элементы блочных матриц $C^{(0)} = \{c_i^{(0)}\}$ – векторы $c_j^{(0)}$.

Элементы блочной матрицы $C^{(0)}$ следует принять равными нулю при $j > i$.

Блочная матрица $C^{(0)}$ называется матрицией-якобиана угловых скоростей ИМ.

3.4. Производные по времени матриц преобразований поворота.

3.4.1. Запись производной по времени матрицы τ_{i-1i}

Матрица τ_{i-1i} равна

$$\tau_{i-1i}^{\dot{}} = \tau_{i-1i} \lambda(\varpi_i),$$

где обозначено $\lambda(*)$ – матрица (3×3) векторного произведения, составленная из элементов вектора

$$* = \{*_x \ *_y \ *_z\}^T :$$

$$\lambda(.) = \begin{vmatrix} 0 & -*_z & *_y \\ *_z & 0 & -*_x \\ -*_y & *_x & 0 \end{vmatrix}$$

Матрица используется при записи векторного произведения в координатной форме.

3.4.2. Свойства матрицы векторного произведения $\lambda(.)$

а) $\lambda^T(\cdot) = -\lambda(\cdot)$; следует из того, что $\lambda(\cdot)$ – кососимметрическая матрица.

б) Если \mathbf{a}, \mathbf{b} – 3-мерные векторы, то векторное произведение $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ в координатной форме записи равно $\lambda(\mathbf{a})\mathbf{b}$, что непосредственно следует из свойств векторного произведения.

в) $\lambda(\mathbf{a})\mathbf{b} = -\lambda(\mathbf{b})\mathbf{a}$; непосредственно следует из свойств векторного произведения.

г) $\lambda(a^{(i)})b^{(i)} = \tau_{ij} [\lambda(a^{(j)})b^{(j)}] = [\lambda(\tau_{ij} a^{(j)})] [\tau_{ij} b^{(j)}]$; следует из свойств векторного произведения: результат векторного произведения не зависит от СК, в которой оно выполнено. Представленные соотношения (квадратными скобками) можно переписать иначе:

$$\lambda(a^{(j)})b^{(j)} = \tau_{ij}^T \lambda(\tau_{ij} a^{(j)}) \tau_{ij} b^{(j)}.$$

Поскольку представленные соотношения справедливы для любого вектора $b^{(j)}$, $b^{(j)}$ можно опустить:

$$\lambda(a^{(j)}) = \tau_{ij}^T \lambda(\tau_{ij} a^{(j)}) \tau_{ij}.$$

Последнее выражение можно переписать так

$$\lambda(\tau_{ij} a^{(j)}) = \tau_{ij} \lambda(a^{(j)}) \tau_{ij}^T,$$

д) $\lambda\left(\sum_{k=1}^i a_k^{(j)}\right) = \sum_{k=1}^i \lambda(a_k^{(j)})$. Это соотношение очевидно.

3.4.3. Вычисление τ_{i-1i} .

В справедливости выражений п.3.4.1 нетрудно убедиться, выполнив предписанные ими действия:

$$\begin{aligned} \tau_{i-1i} &= \tau_z(\sigma_i q_i) \varepsilon_i = (d \\ &\quad | \cos(\sigma_i q_i) \quad -\sin(\sigma_i q_i) \quad 0 | \\ &\quad | \sin(\sigma_i q_i) \quad \cos(\sigma_i q_i) \quad 0 | / dt) \varepsilon_i = \\ &\quad | 0 \quad 0 \quad 1 | \\ \begin{vmatrix} -\sin(\sigma_i q_i) & -\cos(\sigma_i q_i) & 0 \\ \cos(\sigma_i q_i) & -\sin(\sigma_i q_i) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \varepsilon_i \sigma_i q_i &= \begin{vmatrix} \cos(\sigma_i q_i) & -\sin(\sigma_i q_i) & 0 \\ \sin(\sigma_i q_i) & \cos(\sigma_i q_i) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \varepsilon_i \sigma_i q_i = \end{aligned}$$

$$\tau_z(\sigma_i q_i) \lambda(e) \varepsilon_i \sigma_i q_i = \tau_z(\sigma_i q_i) \lambda(\varepsilon_i (\varepsilon_i^T e)) \varepsilon_i \sigma_i q_i = \tau_z(\sigma_i q_i) \lambda(\varepsilon_i v_i) \varepsilon_i \sigma_i q_i =$$

$$\tau_z(\sigma_i q_i) \varepsilon_i \lambda(v_i) \varepsilon_i^T \varepsilon_i \sigma_i q_i = \tau_z(\sigma_i q_i) \varepsilon_i \lambda(v_i) \varepsilon_i^T \varepsilon_i \sigma_i q_i = \tau_z(\sigma_i q_i) \varepsilon_i \lambda(v_i \sigma_i q_i) = \tau_{i-1i} \lambda(w_i).$$

Итак, $\tau_{i-1i} = \tau_{i-1i} \lambda(w_i)$.

ЛЕКЦИЯ 7

3.4.4. Производная по времени матрицы τ_{0i} .

Продифференцируем выражение для τ_{0i} по времени; получим

$$\dot{\tau}_{0i} = d \left(\prod_{k=1}^i \tau_{0k} \right) / dt = \sum_{k=1}^i \tau_{0k} \dot{\tau}_{k-1} \tau_{ki} = \sum \tau_{0k} \tau_{k-1} \lambda(\omega_k) \tau_{ki} = \\ \sum \tau_{0k} \lambda(\omega_k) \tau_{k0} \tau_{0k} \tau_{ki} = \sum \tau_{0k} \lambda(\omega_k) \tau_{k0} \tau_{0i} = \sum \lambda(\tau_{0k} \omega_k) \tau_{0i} = \lambda(\sum \tau_{0k} \omega_k) \tau_{0i} = \\ \lambda(\omega_i^{(0)}) \tau_{0i}.$$

Или

$$\dot{\tau}_{0i} = \lambda(\omega_i^{(0)}) \tau_{0i}.$$

3.5. Линейные скорости звеньев ИМ

Соотношения для определения линейных скоростей звеньев получим, продифференцировав выражения для $V_i^{(0)}$ по времени:

$$V_i^{(0)} = \dot{t}_i^{(0)} = \dot{\tau}_{0i} t_i + \sum_{k=1}^i \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k) + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j).$$

(Различные индексы суммирования во втором и третьем слагаемых приняты для удобства дальнейших преобразований).

Подставив сюда значения $\dot{\tau}_{0k} = \lambda(\omega_k^{(0)}) \tau_{0k}$, получим

$$V_i^{(0)} = \dot{t}_i^{(0)} = \lambda(\omega_i^{(0)}) \tau_{0i} t_i + \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) q_j + l_j) + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j).$$

Развернем полученное выражение, подставив в него

$$\omega_k^{(0)} = \sum_{j=1}^k \tau_{0j} v_j \sigma_j \dot{q}_j.$$

Получим:

$$V_i^{(0)} = \dot{\tau}_{0i} t_i + \sum_{k=1}^i \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k) + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j) = \\ \sum_{j=1}^i \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j) \tau_{0i} t_i \dot{q}_j + \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j) \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k) \dot{q}_j + \\ \sum_{j=1}^i \tau_{0j} v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j.$$

Покажем, что полученное выражение можно представить в следующем виде:

$$V_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i D_{ij}^{(0)} q_j,$$

где

$$D_{ij}^{(0)} = \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j) R_{ij}^{(0)} + \tau_{0j} v_j (1 - \sigma_j) = \lambda(c_j^{(0)}) R_{ij}^{(0)} + \tau_{0j} v_j (1 - \sigma_j),$$

$$R_{ij}^{(0)} = \tau_{0i} t_i + \sum_{k=j}^i \tau_{0k} (v_k (1 - \sigma_k) q_k + l_k).$$

Доказательство.

Для $\tau_{0j} v_j (1 - \sigma_j)$ все очевидно (из третьего слагаемого выражения для $V_i^{(0)}$).

$\lambda(c_j^{(0)}) R_{ij}^{(0)}$ получается в результате преобразований двух первых слагаемых. Первое слагаемое из выражения для $V_i^{(0)}$ в выражение для $R_{ij}^{(0)}$ переходит непосредственно. Докажем, что второе слагаемое в $R_{ij}^{(0)}$ можно получить, преобразовав второе слагаемое в $V_i^{(0)}$ путем изменения порядка и пределов суммирования.

В самом деле:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j) \tau_{0k} (v_k (1 - \sigma_k) q_k + l_k) q_j &= \sum_{j=1}^i \sum_{k=j}^i \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j) \tau_{0k} (v_k (1 - \sigma_k) q_k + l_k) q_j = \\ \sum_{j=1}^i \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j) \sum_{k=j}^i \tau_{0k} (v_k (1 - \sigma_k) q_k + l_k) q_j. \end{aligned}$$

Пояснение.

До перестановки: $k=1, j=1.$
 $k=2, j=1,2.$

\dots
 $k=i, j=1,2,\dots,i.$

После перестановки:

$j=1, k=1,\dots,i,$

$j=2, k=2,\dots,i,$

\dots

$j=i, k=i.$

Можно видеть, что полученное выражение соответствует второму слагаемому $R_{ij}^{(0)}$, что и требовалось доказать.

$D_{ij}^{(0)}$ - векторы размера (3x1).

3.6. Свойства векторов $D_{ij}^{(0)}$

a) $D_j^{(0)}$ - орт оси Z_{j-1} , спроектированный на оси СК_{0..}, если $j = [\Pi\Pi]$.

- б) $D_{ij}^{(0)} = \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j) R_{ij}^{(0)}$, если $j = [ВП]$.
 г) $|D_{ij}^{(0)}| = 1$, если $j = [ПП]$.
 е) $R_{ij}^{(0)}$ - есть вектор, проведенный из начала CK_{j-1} к точке на звене i , скорость которой определяется, рассматриваемый в проекциях на оси CK_0 .
 ж) $|R_{ij}^{(0)}|$ - длина вектора, проведенного из начала CK_{j-1} к точке на звене i , скорость которой определяется.
 з) $|D_{ij}^{(0)\omega}|$ = площади прямоугольника, построенного на векторах $c_j^{(0)}$ и $R_{ij}^{(0)}$ как на сторонах. Поскольку $|c_j^{(0)}| = 1$, $|D_{ij}^{(0)\omega}|$ численно равен длине перпендикуляра, опущенного из конца вектора $R_{ij}^{(0)}$ к линии вдоль вектора $c_j^{(0)}$.

Геометрическая иллюстрация свойств векторов $D_{ij}^{(0)}$ и $R_{ij}^{(0)}$ дана на рис.3.1.

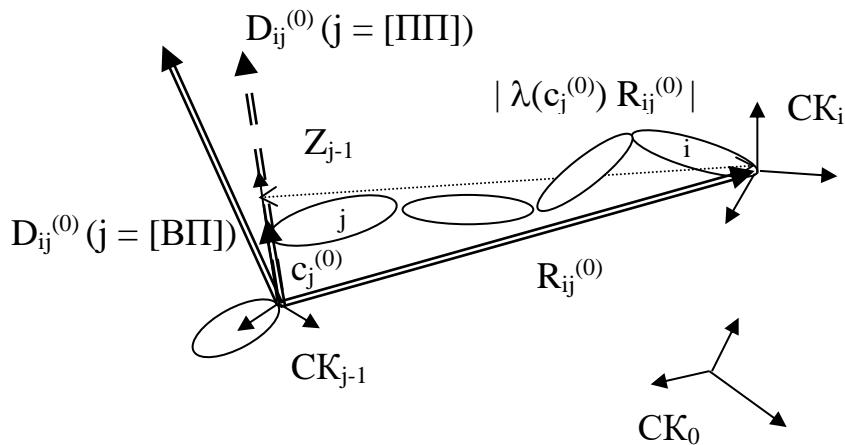


Рис.3.1. Векторы $D_{ij}^{(0)\omega}$, $R_{ij}^{(0)}$.

3.7. Матрицы-якобианы линейных скоростей ИМ.

Из выражений для расчета линейных скосротей звеньев ИМ следует

$$V_n^{(0)} = D_n^{(0)} \dot{q}$$

где

$$D_n^{(0)} = [D_{n1}^{(0)} \ D_{n2}^{(0)} \ \dots \ D_{nn}^{(0)}] -$$

матрица, составленные из векторов $D_j^{(0)}$, имеющие размер (3xn).

Матрица $D_n^{(0)}$ линейно связывает между собой векторы производных по времени обобщенных координат ИМ и угловых скоростей последнего (n -го) звена ИМ и носит название матриц-якобианов линейных скоростей (n -го звена) ИМ.

Аналогично можно построить матрицу-якобиан $D_i^{(0)}$ для любых других звеньев ИМ.

Важным является то, что с помощью этих матриц можно, зная производные по времени обобщенных координат ИМ (скоростей вращения шарниров), определить линейную скорость любого звена ИМ.

Зная $D_i^{(0)}$, можно составить блочную матрицу $D^{(0)}$, в которой матрицы $D_i^{(0)}$ представлены (блочными) строками размера $(3 \times n)$ с соответствующими номерами. Размер блочных матриц – $(3n \times n)$.

С использованием таких блочных матриц ИМ можно записать выражения выражения для расчета угловых скоростей сразу всех звеньев ИМ:

$$V^{(0)} = D^{(0)} q^{\dot{}} ,$$

где

$$V^{(0)} = [V_1^{(0)T} \ V_2^{(0)T} \ \dots \ V_n^{(0)T}]^T .$$

Элементы блочной матрицы $D^{(0)} = \{D_{ij}^{(0)}\}$ – векторы $D_{ij}^{(0)}$.

Поскольку в выражениях для расчета линейных скоростей суммирование ведется только до i , элементы матрицы $D^{(0)}$ следует принять равными нулю при $j > i$.

Блочная матрица $D^{(0)}$ носит название матрицы-якобиана линейных скоростей ИМ.

3.8. Матрица-якобиан последнего звена ИМ.

Выпишем выражения для расчета линейных и угловых скоростей последних звеньев ИМ:

$$\begin{cases} \omega_n^{(0)} = C_n^{(0)} q^{\dot{}} \\ V_n^{(0)} = D_n^{(0)} q^{\dot{}} \end{cases}$$

Составим теперь блочный вектор $[\omega_n^{(0)T} \ V_n^{(0)T}]^T$ и блочную матрицу $\Xi^{(0)}$, элементы которой $c_i^{(0)}$ и $D_{ni}^{(0)}$:

$$\Xi^{(0)} = \begin{pmatrix} c_1^{(0)} & c_2^{(0)} & \dots & c_n^{(0)} \\ \hline D_{n1}^{(0)} & D_{n2}^{(0)} & \dots & D_{nn}^{(0)} \end{pmatrix} .$$

Тогда систему уравнений (2.15) можно представить в виде одного уравнения

$$\begin{Bmatrix} \omega_n^{(0)} \\ V_n^{(0)} \end{Bmatrix} = \Xi^{(0)} \dot{q},$$

связывающего между собой векторы угловой и линейной скорости последнего звена ИМ в базовой (декартовой) СК, и вектор производных обобщенных координат ИМ.

Связь между обобщенными и декартовыми координатами – линейная. Матрица $\Xi^{(0)}$, связывающая между собой обобщенные и декартовы координаты последнего звена ИМ, называется матрицей-якобианом скоростей ИМ или просто матрицей-якобианом.

На практике необходимо решать обе задачи. Решения прямой задачи позволяет установить скорость движения ИМ по известным показаниям датчиков скорости, установленных на валах приводов. Решение обратной кинематической задачи - определить сигналы управления на входах приводов (при управлении приводами по скорости), соответствующие заданной скорости движения ИМ. Для решения обратной кинематической задачи для скоростей ИМ применяют специальные приемы, позволяющие исключить возможные неоднозначности.

Если при составлении матрицы $\Xi^{(0)}$ использовать в качестве элементов векторы $c_j^{(0)}$ и $D_{ij}^{(0)}$, можно решать задачи расчета скоростей любых других звеньев ИМ, а также обратные задачи.

3.9. Прямая кинематическая задача о скорости ИМ

Используя матрицу-якобиан $D_i^{(0)}$ можно, зная производные по времени обобщенных координат ИМ (скоростей шарниров), определить линейную скорость рабочего органа ИМ. Задача расчета линейных и угловых скоростей звеньев ИМ по известным производным обобщенных координат носит название прямой задачи о скорости звеньев ИМ МР.

Прямая кинематическая задача для скоростей ИМ всегда имеет решение и при том единственное.

3.10. Понятие обратной задачи о скорости ИМ

Использование матрицы-якобиана позволяет решать как прямую, так и обратную кинематическую задачу для скоростей ИМ (определение скоростей последнего звена по известным производным обобщенных координат ИМ и определение обобщенных координат по заданным скоростям последнего звена). В последнем случае необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений вида:

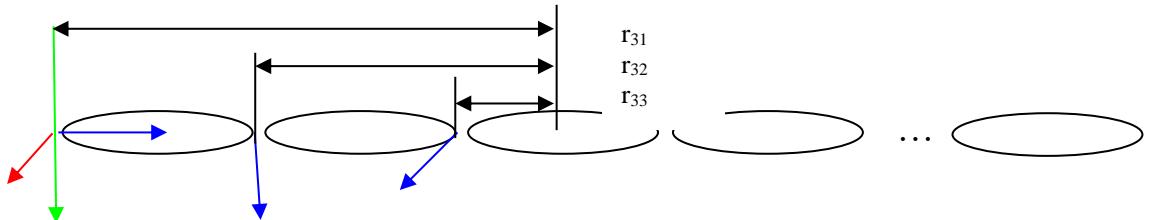
$$\dot{q} = \Xi^{(0)-1} \begin{Bmatrix} \omega_n^{(0)} \\ V_n^{(0)} \end{Bmatrix},$$

Обратная кинематическая задача может иметь единственное решение, иметь множество решений или не иметь их совсем. Конкретный случай зависит от свойств матрицы-якобиана. Элементы матрицы-якобиана – функции обобщенных координат ИМ.

3.11. Примеры решения прямой и обратной задач о сокорости звеньев ИМ

3.11.1. Прямая и обратная кинематические задачи об угловой скорости звеньев ИМ

Обратимся к ИМ КМР ERA в рассмотренной выше конфигурации (вытянутое положение). Будем считать подвижными только первые три звена:



$$\mathbf{c}_1^{(0)} = [0 \ 0 \ 1]^T, \mathbf{c}_2^{(0)} = [0 \ 1 \ 0]^T, \mathbf{c}_3^{(0)} = [1 \ 0 \ 0]^T.$$

$$\boldsymbol{\omega}_3^{(0)} = [\omega_{3x}^{(0)} \ \omega_{3y}^{(0)} \ \omega_{3z}^{(0)}]^T = [0 \ 0 \ 1]^T \dot{q}_1 + [0 \ 1 \ 0]^T \dot{q}_2 + [1 \ 0 \ 0]^T \dot{q}_3 =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{J} \dot{\mathbf{q}}$$

$$[\dot{q}_1 \ \dot{q}_2 \ \dot{q}_3]^T = \mathbf{J}^{-1} \boldsymbol{\omega}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \text{adj} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Big/ \det J =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Big/ -1 [\omega_{3x}^{(0)} \ \omega_{3y}^{(0)} \ \omega_{3z}^{(0)}]^T;$$

$$\dot{q}_1 = \omega_{3z}^{(0)}, \dot{q}_2 = \omega_{3y}^{(0)}, \dot{q}_3 = \omega_{3x}^{(0)}.$$

3.11.1. Прямая и обратная кинематические задачи о линейной скорости звеньев ИМ

$$V_3^{(0)} = [V_{3x}^{(0)} \ V_{3y}^{(0)} \ V_{3z}^{(0)}]^T = D_{31}^{(0)} q`_1 + D_{32}^{(0)} q`_2 + D_{33}^{(0)} q`_3$$

$$D_{31}^{(0)} = \lambda(c_1^{(0)}) R^{(0)}_{31} = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$D_{32}^{(0)} = \lambda(c_2^{(0)}) R^{(0)}_{32} = [r_{32} \ 0 \ 0]^T$$

$$D_{33}^{(0)} = \lambda(c_2^{(0)}) R^{(0)}_{33} = [0 \ -r_{33} \ 0]^T$$

$$V_3^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & r_{32} & 0 \\ 0 & 0 & -r_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q`$$

Матрица-якобиан имеет нуль на месте первого столбца и последней строки и является вырожденной. Это значит, что в исходной постановке задача не имеет решения.

Из рассмотрения матрицы следует, что компонента $V_{3z}^{(0)}$ вектора $V_3^{(0)}$ не определена, а вектор $V_3^{(0)}$ не зависит от $q`_1$. Принимая это во внимание, откажемся от рассмотрения $V_{3z}^{(0)}$ и $q`_1$. Это эквивалентно вычеркиванию из матрицы-якобиана первого столбца и третьей строки. Тогда можно записать

$$[V_{3x}^{(0)} \ V_{3y}^{(0)}]^T = \begin{bmatrix} r_{32} & 0 \\ 0 & -r_{33} \end{bmatrix} [q`_2 \ q`_3]^T$$

$$[q`_2 \ q`_3]^T = \begin{bmatrix} r_{32} & 0 \\ 0 & -r_{33} \end{bmatrix}^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -r_{33} & 0 \\ 0 & r_{32} \end{bmatrix} / (-r_{32} r_{33}) \right\} [V_{3x}^{(0)} \ V_{3y}^{(0)}]^T$$

$$\begin{aligned} q`_2 &= 1/r_{32} V_{3x}^{(0)} \\ q`_3 &= -1/r_{33} V_{3y}^{(0)}. \end{aligned}$$

ЛЕКЦИЯ 8

3.8. Матрица-якобиан последнего звена ИМ.

Выпишем выражения для расчета линейных и угловых скоростей последних звеньев ИМ:

$$\begin{cases} \omega_n^{(0)} = C_n^{(0)} q \\ V_n^{(0)} = D_n^{(0)} q \end{cases}, \quad (*)$$

где

$$C_n^{(0)} = [c_1^{(0)} \ c_2^{(0)} \ \dots \ c_n^{(0)}],$$

$$D_n^{(0)} = [D_{n1}^{(0)} \ D_{n2}^{(0)} \ \dots \ D_{nn}^{(0)}].$$

Составим теперь блочный вектор $[\omega_n^{(0) T} \ V_n^{(0) T}]^T$ и блочную матрицу $\Xi^{(0)}$, элементы которой $c_i^{(0)}$ и $D_{ni}^{(0)}$:

$$\Xi^{(0)} = \begin{pmatrix} c_1^{(0)} & c_2^{(0)} & \dots & c_n^{(0)} \\ \hline D_{n1}^{(0)} & D_{n2}^{(0)} & \dots & D_{nn}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Тогда систему уравнений (2.15, (*)) из этого раздела можно представить в виде одного уравнения

$$\begin{cases} \omega_n^{(0)} \\ V_n^{(0)} \end{cases} = \Xi^{(0)} q,$$

связывающего между собой векторы угловой и линейной скоростей последнего звена ИМ в базовой (декартовой) СК, и вектор производных обобщенных координат ИМ.

Связь между производными обобщенных и декартовых координат – линейная. Матрица $\Xi^{(0)}$, связывающая между собой производные обобщенных и декартовых координат последнего звена ИМ, называется матрицей-якобианом скоростей ИМ или просто матрицей-якобианом ИМ.

Отметим, что матрица

$$\Xi^{(0)} = \Xi^{(0)}(q)$$

есть функция параметров ИМ и текущих значений обобщенных координат ИМ (координат сочленений). Другими словами, эта матрица зависит от текущей конфигурации кинематической цепи ИМ МР.

3.9. Прямая кинематическая задача о скорости ИМ

Используя матрицу-якобиан $\Xi^{(0)}(q)$, можно, зная параметры ИМ, текущие значения координат сочленений (вектор q) и производные по

времени обобщенных координат ИМ - скоростей движения ИМ в сочленениях (вектор \dot{q}) определить угловую и линейную скорости рабочего органа ИМ. Задача расчета линейных и угловых скоростей рабочего органа (последнего звена ИМ) по известным параметрам ИМ, производным обобщенных координат (вектор \dot{q}) и значениям координат сочленений (вектор q) носит название прямой задачи о скорости ИМ МР.

Прямая кинематическая задача о скорости ИМ всегда имеет решение и притом - единственное.

Решение прямой задачи о скорости позволяет при управлении МР определять скорости движения ЗУМ, что важно на практике. Для этого нужно знать параметры ИМ, значения координат сочленений и скорости движения ИМ в сочленениях (фактически, это координаты и скорости приводов).

Это сделать проще по сравнению с измерением угловой и линейной скоростей непосредственно ЗУМ.

3.10. Обратная кинематическая задача о скорости ИМ

Использование матрицы-якобиана позволяет решать как прямую, так и обратную кинематическую задачу о скорости ИМ.

Обратная задача – определение производных обобщенных координат ИМ по известным значениям параметров ИМ, обобщенных координат, угловой и линейной скоростей последнего звена. В этом случае необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$\dot{q} = \Xi^{(0)-1}(q) \begin{matrix} \omega_n^{(0)} \\ v_n^{(0)} \end{matrix},$$

где $\Xi^{(0)-1}(q)$ – обратная по отношению к $\Xi^{(0)}(q)$ матрица.

Обратная кинематическая задача может иметь единственное решение, иметь множество решений или не иметь их совсем. Конкретный случай зависит от свойств матрицы-якобиана.

Из линейной алгебры известно, что (строгое) понятие обратной матрицы применимо только к квадратным матрицам. При этом обратная матрица существует только тогда, когда ее определитель не равен 0, что возможно в случае, когда все строки (все столбцы) матрицы линейно независимы (матрица имеет полный ранг). Ранг такой матрицы равен числу её строк (столбцов).

3.11. Решение прямой и обратной задач о скорости звеньев ИМ

Обратимся к ИМ КМР ERA в конфигурации (вытянутое положение). В общем случае ERA имеет 7 сочленений. Размерность вектора угловых и

линейных скоростей последнего звена равна 6. Поэтому в общем случае размер матрицы Якоби равен (6x7).

Для простоты и наглядности будем считать подвижными только первые три звена (рис.*). В этом случае размерность матрицы Якоби составит (6x3).

На рисунке оси СК выделены цветом x – R, y – G, z – B. Базовая СК изображена полностью, СК звеньев – только оси z. Через R_{ni} обозначены длины векторов, проведенных из начала СК₀, СК₁ и СК₃ к началу СК последнего звена. Векторы R_{ni} перпендикулярны осям X₀, Z₁ и Z₂, соответственно

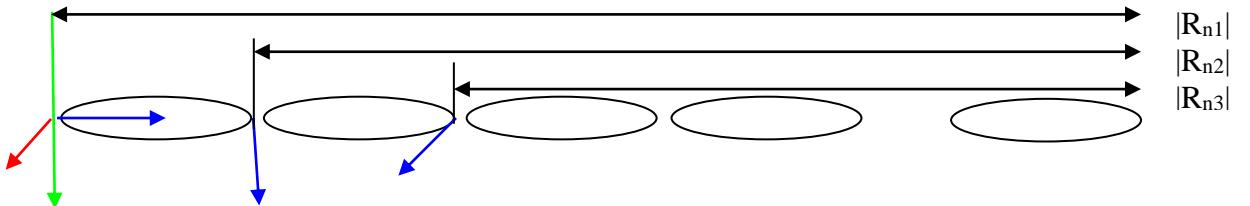


Рис.(*)

Матрица Якоби имеет вид

$$\Sigma^{(0)} = \frac{c_1^{(0)} \ c_2^{(0)} \ c_3^{(0)}}{D_{n1}^{(0)} \ D_{n2}^{(0)} \ D_{n3}^{(0)}}.$$

Элементы этой матрицы – векторы (3x1) соответственно равны

$$c_1^{(0)} = [0 \ 0 \ 1]^T, \quad c_2^{(0)} = [0 \ 1 \ 0]^T, \quad c_3^{(0)} = [1 \ 0 \ 0]^T.$$

$$R^{(0)}_{n1} = [0 \ 0 \ |R_{n1}|]^T, \quad R^{(0)}_{n2} = [0 \ 0 \ |R_{n2}|]^T, \quad R^{(0)}_{n3} = [0 \ 0 \ |R_{n3}|]^T.$$

$$D_{n1}^{(0)} = \lambda(c_1^{(0)}) R^{(0)}_{n1} = [0 \ 0 \ 0]^T$$

$$D_{n2}^{(0)} = \lambda(c_2^{(0)}) R^{(0)}_{n2} = [|R_{n2}| \ 0 \ 0]^T$$

$$D_{n3}^{(0)} = \lambda(c_3^{(0)}) R^{(0)}_{n3} = [0 \ -|R_{n3}| \ 0]^T$$

Решение прямой задачи о скорости имеет вид.

Для угловой скорости

$$\omega_n^{(0)} = [\omega_{nx}^{(0)} \ \omega_{ny}^{(0)} \ \omega_{nz}^{(0)}]^T = [0 \ 0 \ 1]^T q`_1 + [0 \ 1 \ 0]^T q`_2 + [1 \ 0 \ 0]^T q`_3 =$$

$$[q`_3 \ q`_2 \ q`_1]^T$$

Для линейной скорости

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_n^{(0)} &= [V_{nx}^{(0)} \quad V_{ny}^{(0)} \quad V_{nz}^{(0)}]^T = D_{n1}^{(0)} q^1 + D_{n2}^{(0)} q^2 + D_{n3}^{(0)} q^3 = \\ &= [|R_{n2}| q^2 \quad -|R_{n3}| q^3 \quad 0]^T \end{aligned}$$

Для решения обратной задачи о скорости формально нужно обратить матрицу-якобиан размера (6x3).

Матрица такого размера напрямую обращена быть не может.

Тем не менее, используя полученные выше соотношения, можно построить другие «неполные» матрицы Якоби меньшего размера – в нашем случае – размера (3x3). Матрицы такого размера удобно использовать для решения частных обратных задач, например, задаче об угловой скорости (матрицу-якобиан обозначим $\Xi_\omega^{(0)}$) и задаче о линейной скорости последнего звена манипулятора (матрица $\Xi_V^{(0)}$).

В нашем случае для обратной задачи об угловой скорости можно записать

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} q^{\omega} = \Xi_\omega^{(0)} q^{\omega} = \omega^{(0)}$$

Тогда

$$\begin{aligned} [q^1 \quad q^2 \quad q^3]^T &= (\Xi_\omega^{(0)})^{-1} \omega^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \omega^{(0)} = (\text{adj} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}) / (\det \Xi_\omega^{(0)}) \omega^{(0)} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{3x}^{(0)} & \omega_{3y}^{(0)} & \omega_{3z}^{(0)} \end{bmatrix}^T; \end{aligned}$$

$$q^1 = \omega_{nz}^{(0)}, \quad q^2 = \omega_{ny}^{(0)}, \quad q^3 = \omega_{nx}^{(0)}.$$

Соотношение для вектора линейных скоростей последнего звена имеет вид

$$\mathbf{V}_n^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & |R_{n2}| & 0 \\ 0 & 0 & -|R_{n3}| \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q^{\omega} = \Xi_V^{(0)} q^{\omega}$$

Матрица-якобиан $\Xi_V^{(0)}$ имеет не полный ранг ($\text{Rank } \Xi_V^{(0)} = 2$) и является вырожденной. Это значит, что в исходной постановке задача не имеет решения. Выходом из создавшегося положения является

формирование невырожденной матрицы – якобиана меньшего размера. В данном случае размера (2x2).

Для этого примем во внимание, что компонента $V_{3z}^{(0)} = 0$, а вектор $V_3^{(0)}$ не зависит от $q`_1$. Исходя из этого, откажемся от рассмотрения $V_{3z}^{(0)}$ и $q`_1$. Это эквивалентно вычеркиванию из матрицы-якобиана первого столбца и третьей строки. Тогда можно записать

$$[V_{nx}^{(0)} \ V_{ny}^{(0)}]^T = \begin{bmatrix} |R_{n2}| & 0 \\ 0 & -|R_{n3}| \end{bmatrix} [q`_2 \ q`_3]^T$$

$$[q`_2 \ q`_3]^T = \begin{bmatrix} |R_{n2}| & 0 \\ 0 & -|R_{n3}| \end{bmatrix}^{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} -|R_{n3}| & 0 \\ 0 & |R_{n2}| \end{bmatrix} / (-|R_{n2}| |R_{n3}|) \right\} [V_{nx}^{(0)} \ V_{ny}^{(0)}]^T$$

Окончательно получаем

$$q`_2 = 1/|R_{n2}| V_{nx}^{(0)}$$

$$q`_3 = -1/|R_{n3}| V_{ny}^{(0)}.$$

Обратная задача о скорости имеет важное практическое значение, например, при управлении движением МР от джойстиков. Для этого используют два 3-х степенных джойстика. Левый джойстик используют для управления угловыми скоростями, а правый – для управления линейными скоростями последнего звена ИМ.

ЛЕКЦИЯ 9

4. Угловые и линейные ускорения звеньев

4.1. Угловые ускорения

Продифференцируем $\omega_i^{(0)}$

$$\dot{\omega}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \tau_{0j} v_j \sigma_j \ddot{q}_j.$$

по времени. Получим:

$$\dot{\omega}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \dot{\tau}_{0j} \bar{\omega}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \dot{\bar{\omega}}_j = \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} \bar{\omega}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} \dot{\bar{\omega}}_j,$$

т.к. $\bar{\omega}_i = v_j \sigma_j \ddot{q}_j$, где $\bar{\omega}_i$ – «омега i-я с крышкой»,

$$\dot{\tau}_{0j} = \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j}$$

(обходимся без формального дифференцирования τ_{0j} по времени как матрицы (3x3) – функции q_1, q_2, \dots, q_i),

или в развернутой форме записи

$$\dot{\omega}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} v_j \sigma_j \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} v_j \sigma_j \ddot{\bar{\omega}}_j,$$

где

$$\omega_j^{(0)} = \sum_{k=1}^j \tau_{0k} v_k \sigma_k \ddot{q}_k.$$

Подставив в выражение для $\dot{\omega}_i^{(0)}$ значение $\omega_j^{(0)}$ в развернутом виде, будем иметь

$$\dot{\omega}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^j \lambda(\tau_{0k} v_k \sigma_k) \tau_{0j} v_j \sigma_j \ddot{q}_j \ddot{q}_k + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} v_j \sigma_j \ddot{\bar{\omega}}_j,$$

Видим, что $\dot{\omega}_i^{(0)}$ есть нелинейная векторная функция q_1, q_2, \dots, q_i , произведения первых производных обобщенных координат ($\ddot{q}_j \ddot{q}_k$) и линейная функция вторых производных $\ddot{\bar{\omega}}_j$.

С другой стороны, из полученных ранее соотношений следует

$$\dot{\omega}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \dot{c}_j^{(0)} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^i c_j^{(0)} \ddot{\bar{\omega}}_j.$$

Сравнив между собой соотношения (4.1) и (4.2), увидим:

$$\dot{c}_j^{(0)} = \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} v_j \sigma_j = \lambda(\omega_j^{(0)}) c_j^{(0)}.$$

$$\dot{\omega}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) c_j^{(0)} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^i c_j^{(0)} \ddot{q}_j.$$

4.2. Линейные ускорения

Продифференцируем $V_i^{(0)}$

$$V_i^{(0)} = \dot{t}_i^{(0)} = \lambda(\omega_i^{(0)}) \tau_{0i} t_i + \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) q_j + l_j) + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j).$$

по времени. Получим:

$$\begin{aligned} V_i^{(0)} &= \lambda(\omega_i^{(0)}) \tau_{0i} t_i + \lambda(\omega_i^{(0)}) \dot{\tau}_{0i} t_i + \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) q_j + l_j) + \\ &\quad \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) q_j + l_j) + \color{blue}{\sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j)} + \\ &\quad \color{blue}{\sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j)} + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \ddot{q}_j). \end{aligned}$$

После подстановки в полученное выражение значений $\dot{\tau}_{0j}$ будем иметь:

$$\begin{aligned} V_i^{(0)} &= \{\lambda(\omega_i^{(0)}) \tau_{0i} t_i\}_1 + \{\lambda(\omega_i^{(0)}) \lambda(\omega_i^{(0)}) \tau_{0i} t_i\}_2 + \{\sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) q_j + l_j)\}_3 + \\ &\quad \{\sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) q_j + l_j)\}_4 + \{\color{red}{2 \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j)}\}_5 + \\ &\quad \color{red}{\{\sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j)\}_6}. \end{aligned} \tag{*}$$

Множитель 2 образовался в результате суммирования **«синих»** слагаемых в предыдущем выражении.

Выражение для $V_i^{(0)}$ в развернутой форме можно получить, подставив в последнее соотношение значения $\omega_j^{(0)}$ и $\omega_i^{(0)}$.

Однако, ранее мы получили выражение для линейных скоростей в виде

$$V_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i D_{ij}^{(0)} \dot{q}_j$$

где $D_{ij}^{(0)} = D_{ij}^{(0)}(q_1, q_2, \dots, q_i)$, причем $q_j = q_j(t)$.

Поэтому после дифференцирования последнего выражения по времени, получим

$$\dot{V}_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i D_{ij}^{(0)} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^i D_{ij}^{(0)} \ddot{q}_j.$$

Из выражения для $\dot{V}_i^{(0)}$ следует, что $\dot{V}_i^{(0)}$ – линейная функция \ddot{q}_j . Поэтому дальнейшие выкладки можно упростить, развернув в выражении для $\dot{V}_i^{(0)}$ слагаемые, содержащие \ddot{q}_j и выделив в них компоненты – явные функции \ddot{q}_j . Эти слагаемые выделены **красным цветом**.

Для того, чтобы полностью развернуть выражение для $\dot{V}_i^{(0)}$ нужно определить вид $D_{ij}^{(0)} q_j$. Все компоненты q_j – это элементы векторов $D_{ij}^{(0)}$. Эти векторы мы получили ранее.

Обратим внимание на 1-е, 3-е и последнее слагаемые в выражении для $\dot{V}_i^{(0)}$:

$$\begin{aligned} & \lambda(\omega_i^{(0)}) \tau_{0i} t_i + \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) q_j + l_j) + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \ddot{q}_j) = \\ & \lambda \left(\sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j \right) \tau_{0i} t_i + \\ & \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \lambda \left(\sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j \right) \tau_{0j} (v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k) + \\ & \sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \ddot{q}_j) = \end{aligned}$$

(во втором слагаемом переименованы индексы j и k – для удобства дальнейших преобразований)

$$\begin{aligned} & \lambda \left(\sum_{j=1}^i \tau_{0j} v_j \sigma_j \ddot{q}_j \right) \tau_{0i} t_i + \sum_{k=1}^i \lambda \left(\sum_{j=1}^k \tau_{0j} v_j \sigma_j \ddot{q}_j \right) \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k) + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \ddot{q}_j) + \\ & \lambda \left(\sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j \right) \tau_{0i} t_i + \sum_{k=1}^i \lambda \left(\sum_{j=1}^k \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j \right) \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k) = \\ & \sum_{j=1}^i \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j) \tau_{0i} t_i \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^i \sum_{j=1}^k \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j) \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) + q_k l_k) \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \ddot{q}_j + \\ & \lambda \left(\sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j \right) \tau_{0i} t_i + \sum_{k=1}^i \lambda \left(\sum_{j=1}^k \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j \right) \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k) = \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^i D_{ij}^{(0)} \dot{q}_j + \dots .$$

(Мы воспользовались результатами вывода формулы линейной скорости звеньев).

Тогда $\sum_{j=1}^i D_{ij}^{(0)} \dot{q}_j$ - это 2,4,5 слагаемые из выражения для $\dot{V}_i^{(0)}$ + оставшиеся

после отделения слагаемых с множителями \dot{q}_j слагаемые из последнего выражения, т.е.

$$\sum_{j=1}^i D_{ij}^{(0)} \dot{q}_j = \lambda(\omega_i^{(0)}) \lambda(\omega_i^{(0)}) \tau_{0i} t_i +$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j + l_j) + 2 \sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j) + \\ & \lambda \left(\sum_{j=1}^i \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} v_j \sigma_j \dot{q}_j \right) \tau_{0i} t_i + \sum_{k=1}^i \lambda \left(\sum_{j=1}^k \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} v_j \sigma_j \dot{q}_j \right) \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) \dot{q}_k + l_k). \end{aligned}$$

Последнее выражение можно развернуть, подставив в него значения $\omega_i^{(0)}$ и $\omega_j^{(0)}$ (рискнёте?).

После этого наглядно убеждаемся, что в последнем выражении каждое слагаемое содержит произведения производных обобщенных координат второй степени. Поэтому линейные ускорения звеньев ИМ линейно зависят от вторых производных обобщенных координат (зависимость задается векторами $D_{ij}^{(0)}$) и «квадратично» – от первых производных обобщенных координат ИМ.

Внимательное рассмотрение последнего выражения дает компоненты вида

$$2\lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) \dot{q}_j)$$

– это ускорения Кориолиса, содержащее произведения угловых и линейных скоростей звеньев а также центробежные (пропорциональные вторым степеням производных одноименных координат вращательных пар) и гироколические ускорения (пропорциональные произведениям производных разноименных координат).

РАЗДЕЛ 2. ДИНАМИКА ИМ МР

1. Силы и моменты.

Рассматриваются силы и моменты, действующие на звенья и шарниры ИМ, а также силы и моменты, развиваемые приводами манипулятора.

1.1. Силы, действующие на звенья ИМ

Мысленно разорвём кинематическую цепь в местах соединения смежных звеньев (там, где расположены сочленения). Действие утраченных связей заменим силами реакции. Точки приложения сил реакции – места разрыва кинематической цепи (рис.1.1).

Введем следующие обозначения:

- \mathbf{F}_{Bi} – суммарный вектор *внешних* сил, приложенный к звену i , приведенный к центру масс звена i ,
- \mathbf{F}_{ii} – вектор *сил инерции* i -го звена (приложен к центру масс звена i),
- \mathbf{f}_i – вектор сил реакции, приложенный к звену i в месте сочленения звеньев $i-1$ и i (в точке, совпадающей с центром CK_{i-1}).
- \mathbf{r}_i – вектор координат СОМ (центр масс) звена i (задан в CK_i).

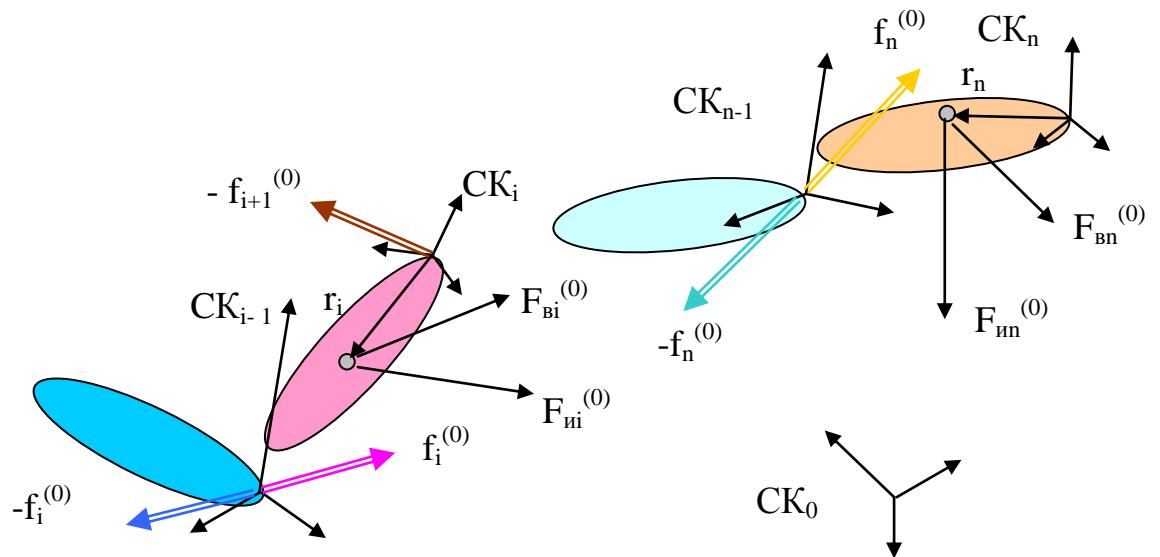


Рис.1.1. Силы, действующие на звенья ИМ.

Составим уравнения кинето-статического равновесия (принцип Даламбера*. В проекциях на оси CK_0 :

*Даламбер /1717 – 1783/: «Работайте, работайте, а понимание придёт потом».

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{bn}^{(0)} + F_{in}^{(0)} + f_n^{(0)} = 0, \\ F_{bn-1}^{(0)} + F_{in-1}^{(0)} + f_{n-1}^{(0)} - f_n^{(0)} = 0, \\ F_{bn-2}^{(0)} + F_{in-2}^{(0)} + f_{n-2}^{(0)} - f_{n-1}^{(0)} = 0, \\ \dots \\ F_{bi}^{(0)} + F_{ii}^{(0)} + f_i^{(0)} - f_{i+1}^{(0)} = 0, \\ \dots \\ F_{b1}^{(0)} + F_{i1}^{(0)} + f_1^{(0)} - f_2^{(0)} = 0. \end{array} \right.$$

Вычислим силы реакции связей

$$\left\{ \begin{array}{l} f_n^{(0)} = - (F_{bn}^{(0)} + F_{in}^{(0)}), \\ f_{n-1}^{(0)} = - (F_{bn-1}^{(0)} + F_{in-1}^{(0)}) + f_n^{(0)}, \\ f_{n-2}^{(0)} = - (F_{bn-2}^{(0)} + F_{in-2}^{(0)}) + f_{n-1}^{(0)} = 0, \\ \dots \\ f_i^{(0)} = - (F_{bi}^{(0)} + F_{ii}^{(0)}) + f_{i+1}^{(0)} = 0, \\ \dots \\ f_1^{(0)} = - (F_{b1}^{(0)} + F_{i1}^{(0)}) + f_2^{(0)} = 0 \end{array} \right.$$

Выполнив последовательно, начиная от звена n , подстановку значений сил реакций в уравнения для $n-1, n-2, \dots, i$ -го звеньев, получим в общем виде

$$f_i^{(0)} = - \sum_{j=i}^n (F_{bj}^{(0)} + F_{ij}^{(0)}),$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Выражение для $F_{ij}^{(0)}$ имеет вид

$$F_{ij}^{(0)} = - m_j V_j^{(0)}$$

поэтому

$$f_i^{(0)} = \sum_{j=i}^n (m_j V_j^{(0)} - F_{bj}^{(0)}),$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Полученные выражения позволяют определить силы, действующие на звенья ИМ при его движении. Из них следует, что к звену i приложены все внешние силы, действующие на звенья с номерами от i до n , а также - силы инерции, обусловленные движением всех звеньев ИМ. На первое звено ИМ действуют все внешние силы и силы инерции всех звеньев. Сила реакции со стороны основания ИМ (действует на первое звено) равна $f_1^{(0)}$. ИМ воздействует на основание с силой $(-f_1^{(0)})$.

Видим, что силы реакции связей смежных звеньев компенсируют друг друга.

Поэтому принцип Даламбера для рассматриваемых ИМ может быть применен не только к каждому из звеньев, но и к участку кинематической цепи, начиная от свободного конца (от звена n). Мы воспользуемся этим и запишем уравнения кинето-статического равновесия для участка кинематической цепи, включающего звенья от i до n.

Согласно принципу Даламбера этот участок кинематической цепи находится в равновесии под действием всех внешних сил и всех сил инерции, действующих на звенья от i до n и сил реакции связей действующих на звено i, что эквивалентно записи

$$f_i^{(0)} + \sum_{j=i}^n (F_{bj}^{(0)} + F_{ij}^{(0)}) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, n,$$

или

$$f_i^{(0)} = \sum_{j=i}^n (m_j V^{(0)}_j - F_{bj}^{(0)}),$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Последнее уравнение полностью совпадает с полученным выше. Мы воспользуемся этим фактом ниже.

Замечание. Перед подстановкой в выражение для $f_i^{(0)}$ значений $V^{(0)}_j$ в формулах для расчета $V^{(0)}_j$ следует принять $t_j = r_j$.

1.2. Моменты, действующие на звенья ИМ.

В дополнение к п.1.1. введем следующие обозначения (рис.3.2):
 $M_{v,i}$ – суммарный внешний момент, приложенный к звену i,
 M_{ii} – вектор моментов сил инерции i-го звена (приложен к центру масс звена i),
 μ_i – вектор моментов реакции связей в месте сочленения звеньев i-1 и i, приложенный к звену i (к звену i-1 приложен равный по величине и противоположный по знаку вектор).

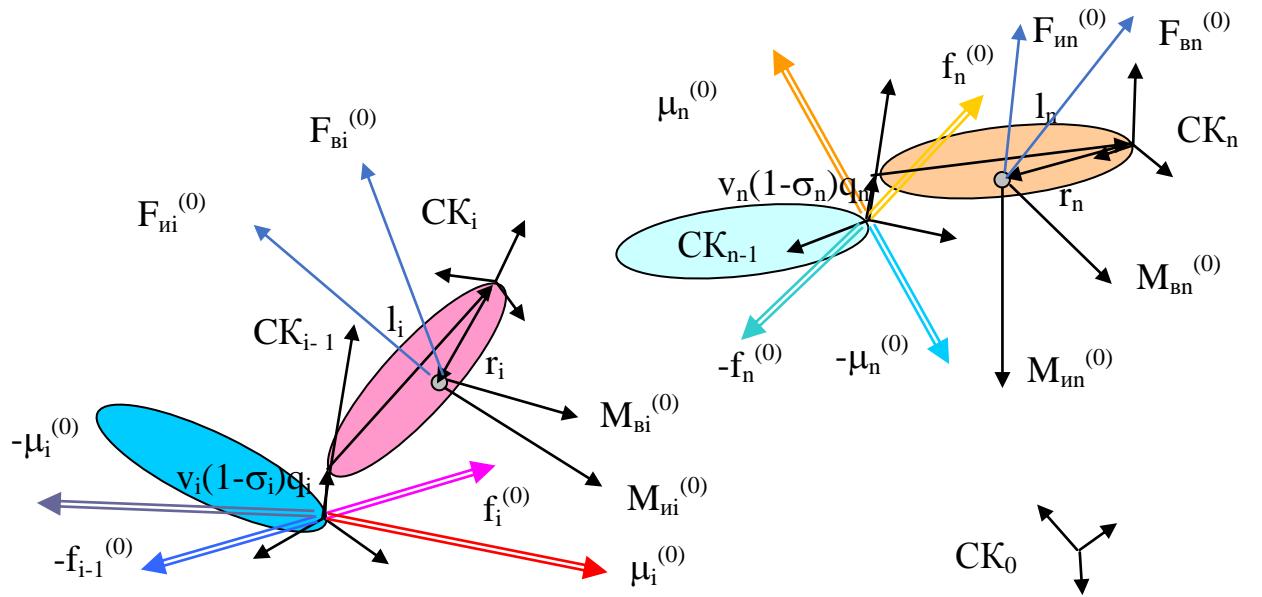


Рис.1.2. Моменты, действующие на звенья ИМ.

Рассмотрим участок кинематической цепи, начиная от звена i . Согласно принципу Даламбера этот участок кинематической цепи находится в равновесии под действием всех внешних сил и моментов, всех сил и моментов инерции, действующих на звенья от i до n и сил реакции связей действующих на звено i , что эквивалентно записи

$$\mu_i^{(0)} + \sum_{j=i}^n (M_{ij}^{(0)} + M_{Bj}^{(0)}) + \sum_{j=i}^n \lambda(R_{ji}^{(0)}) (F_{ij} + F_{Bj}^{(0)}) = 0,$$

где

$$R_{ji}^{(0)} = \tau_{0j} t_j + \sum_{k=i}^j \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k)$$

Учитывая, что

$$M_{ij}^{(0)} = - I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} - \lambda(\omega_j^{(0)}) I_j^{(0)} \omega_j^{(0)},$$

где $I_j^{(0)}$ – тензор инерции звена j . Вычисляется в системе координат, начало которой совпадает с центром масс звена j , а оси параллельны осям CK_0

и, принимая во внимание

$$F_{ij}^{(0)} = -m_j \dot{V}_j^{(0)},$$

получим

$$\mu_i^{(0)} = \sum_{j=i}^n (I_j^{(0)} \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)}) I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} - M_{bj}^{(0)} + \lambda(R_{ji}^{(0)})(m_j \dot{V}_j^{(0)} - F_{bj}^{(0)})).$$

Геометрический смысл векторов $R_{ji}^{(0)}$ был рассмотрен ранее.

Последние выражения совместно с выражениями для расчета $\omega_j^{(0)}$, $\dot{\omega}_j^{(0)}$ позволяют определить моменты, действующие на звенья ИМ при его движении. Можно видеть, что к звену i приложены все внешние моменты, действующие на звенья с номерами от i до n , а также моменты сил инерции, обусловленные движением всех звеньев ИМ. На первое звено ИМ действуют все внешние моменты и моменты сил инерции всех звеньев. Момент реакции со стороны основания ИМ (действует на первое звено) равен $\mu_i^{(0)}$. ИМ воздействует на основание с моментом $(-\mu_i^{(0)})$.

1.3. Силы, действующие вдоль осей шарниров ИМ.

Ось шарнира с номером i совпадает с осью Z_{i-1} . Поэтому для определения сил, действующих вдоль осей шарниров следует, во-первых, векторы сил реакций связей перевести в системы из CK_0 в CK_{i-1} , а во-вторых, спроектировать получившиеся векторы на ось Z_{i-1} .

Ранее мы получили

$$f_i^{(0)} = \sum_{j=i}^n (m_j \dot{V}_j^{(0)} - F_{bj}^{(0)}),$$

$$f_{Z_{i-1}}^{(i-1)} = e^T \tau_{i-1i} \tau_{i0} \sum_{j=i}^n (m_j \dot{V}_j^{(0)} - F_{bj}^{(0)}) = v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i}^n (m_j \dot{V}_j^{(0)} - F_{bj}^{(0)}),$$

поскольку $e^T \tau_{i-1i} = v_i^T$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

$$v_i = \varepsilon_i^T e = \text{const}$$

(ранее писали $\tau_{i-1i}e = v_i$ - вектор проекций орта z_{i-1} на оси CK_i
 $\tau_{0i-1}e = \tau_{0i-1} \tau_{i-1i} \tau_{i-1i}e = \tau_{0i} \tau_{i-1i}e = \tau_{0i} \varepsilon_i^T \tau_z^T (\sigma_i q_i)e = \tau_{0i} \varepsilon_i^T e = \tau_{0i} v_i$, где $v_i = \varepsilon_i^T e$).

1.4. Моменты, действующие вдоль осей шарниров.

Для определения моментов, действующих вдоль осей шарниров следует, во-первых, векторы моментов реакций связей перевести из СК₀ в СК_{i-1}, а во-вторых, спроектировать получившиеся векторы на оси Z_{i-1}:

$$\begin{aligned}\mu_{Z_{i-1}}^{(i-1)} &= v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i}^n (I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)}) I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} - M_{Bj}^{(0)}) + \\ &v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i}^n \lambda(R_{ji}^{(0)}) (m_j V_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}),\end{aligned}$$

i = 1, 2, ..., n.

Силы и моменты, с которыми ИМ воздействует на оси шарниров равны соответственно $-f_{Z_{i-1}}^{(i-1)}$, $-\mu_{Z_{i-1}}^{(i-1)}$ (i = 1, 2, ..., n).

1.5. Силы и моменты, развивающиеся приводами манипулятора. Обратная задача динамики ИМ.

Силы и моменты, развивающиеся приводами манипулятора, определяются из выражений (3.5), если соответствующий шарнир поступательного типа или из выражений (3.6), если шарнир вращательного типа.

Для того, чтобы учесть тип шарнира воспользуемся множителями-индикаторами σ_i . Обозначим

$$\begin{aligned}\mu_{di} &= (1 - \sigma_i) * \text{сила, развивающаяся } i\text{-м приводом} + \\ &\sigma_i * \text{момент, развивающийся } i\text{-м приводом}.\end{aligned}$$

Силы и моменты, развивающиеся приводами, действуют вдоль осей шарниров. Их значения определяются по выражениям п.1.3, если соответствующий шарнир поступательного типа, или по выражениям п.1.4, если шарнир вращательного типа. Нужно помнить, что сила (или момент) привода с номером i действует вдоль оси Z СК_{i-1}. Тогда

$$\mu_{di} = (1 - \sigma_i) f_{Z_{i-1}}^{(i-1)} + \sigma_i \mu_{Z_{i-1}}^{(i-1)}.$$

Подставив в последнее выражение значения сил и моментов, развивающихся приводами, получим

$$\begin{aligned}(1 - \sigma_i) v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i}^n (m_j V_j^{(0)} - F_{Bj}^{(0)}) + \\ \sigma_i v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i}^n (I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)}) I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} - M_{Bj}^{(0)}) +\end{aligned}$$

$$\sigma_i v_i^T \tau_{i0} \sum_{j=i} \lambda(R_{ji}^{(0)}) (m_j \dot{V}_j^{(0)} - F_{bj}^{(0)}) = \mu_{di},$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Приведем подобные члены (выделены красным). При этом заметим, что

$$a) \sigma_i v_i^T \tau_{i0} = c_i^{(0)T},$$

$$b) (1 - \sigma_i) v_i^T \tau_{i0} + \sigma_i v_i^T \tau_{i0} \lambda(R_{ji}^{(0)}) = D_{ji}^{(0)T}.$$

Замечание. Соотношение а) очевидно (устанавливаем сравнением с полученными выше выражениями для $c_i^{(0)}$).

Для того, чтобы убедиться в справедливости замечания б), транспонируем это выражение, т.е. выполним операцию $(D_{ji}^{(0)T})^T$:

$$(D_{ji}^{(0)T})^T = ((1 - \sigma_i) v_i^T \tau_{i0} + \sigma_i v_i^T \tau_{i0} \lambda(R_{ji}^{(0)}))^T = \tau_{0i} v_i (1 - \sigma_i) + \lambda^T(R_{ji}^{(0)}) \tau_{0i} v_i \sigma_i =$$

$$\tau_{0i} v_i (1 - \sigma_i) - \lambda(R_{ji}^{(0)}) \tau_{0i} v_i \sigma_i = \tau_{0i} v_i (1 - \sigma_i) + \lambda(\tau_{0i} v_i \sigma_i) R_{ji}^{(0)} = D_{ji}^{(0)}$$

// ранее получали (Лекция 7)

$$D_{ij}^{(0)} = \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j) R_{ij}^{(0)} + \tau_{0j} v_j (1 - \sigma_j) = \lambda(c_j^{(0)}) R_{ij}^{(0)} + \tau_{0j} v_j (1 - \sigma_j),$$

$$R_{ij}^{(0)} = \tau_{0i} t_i + \sum_{k=j}^i \tau_{0k} (v_k (1 - \sigma_k) q_k + l_k) //.$$

С учетом этого выражение для сил и моментов приводов представим в виде :

$$\sum_{j=1}^n c_j^{(0)T} (I_j^{(0)} \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)}) I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} - M_{bj}^{(0)}) + \sum_{j=1}^n D_{ji}^{(0)T} (m_j \dot{V}_j^{(0)} - F_{bj}^{(0)}) = \mu_{di}.$$

Последнее уравнение совместно с полученными ранее выражениями для $\dot{\omega}_j^{(0)}, \omega_j^{(0)}, \dot{V}_j^{(0)}$ позволяют определить силы и (или) моменты, которые развиваются приводы при известных параметрах движения звеньев ИМ ($q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, i = 1, 2, \dots, n$). Определение сил и (или) моментов, развивающихся приводами по заданным параметрам движения носит название **обратной задачи динамики (ОЗД) ИМ**.

Отметим, что произведение каких-либо двух векторов вида $a^{(.)T} b^{(.)}$ есть координатная запись скалярного произведения векторов a и b , представленных в проекциях на оси СК\$, т.е. векторов $a^{(.)}$ и $b^{(.)}$. Исходя из этого момент (или сила) действующие на i -й привод ИМ есть сумма скалярных произведений векторов $c_i^{(0)}$ и $I_j^{(0)} \dot{\omega}_j^{(0)} + \lambda(\omega_j^{(0)}) I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} - M_{bj}^{(0)}$ ($j =$

$i, \dots, n)$ плюс сумма скалярных произведений векторов $D_{ji}^{(0)}$ и $(m_j V_j^{(0)} - F_{bj}^{(0)})$ ($j = i, \dots, n$).

ЛЕКЦИЯ 11

1.6. Уравнения статического равновесия ИМ.

Положим $\omega_j^{(0)} = \dot{V}_j^{(0)} = \omega_j^{(0)}$ для всех j (ИМ неподвижен). Тогда из последнего уравнения п.1.5 следует:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} M_{bj}^{(0)} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} F_{bj}^{(0)} + \mu_{di} = 0, \\ (\text{если } \omega_j^{(0)} = \dot{V}_j^{(0)} = \omega_j^{(0)} = 0, j = 1, \dots, n). \end{array} \right.$$

1.7. Симметрия уравнений ОЗД и уравнений для определения скоростей звеньев ИМ.

Для расчета сил (моментов) приводов и скоростей звеньев ИМ можно использовать **одни те же компоненты** – векторы $c_i^{(0)} D_{ij}^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, i$) – уравнения скоростей, $c_i^{(0)} D_{ji}^{(0)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$, $j = i, i+1, \dots, n$) – уравнения сил и моментов. Эти компоненты - элементы матриц Якоби ИМ МР.

1.8. Управление по вектору силы

Уравнения п.1.6 запишем для случая, когда внешние силы и моменты приложены только к последнему звену ИМ

$$c_i^{(0)T} M_{vn}^{(0)} + D_{ni}^{(0)T} F_{vn}^{(0)} + \mu_{di} = 0.$$

Составим блочный вектор

$$\begin{matrix} M_{vn}^{(0)} \\ F_{vn}^{(0)} \end{matrix}$$

(размер вектора 6×1)

и вектор

$$\mu_d = [\mu_{d1} \ \dots \ \mu_{dn}]$$

(размер вектора $n \times 1$)

Связь между введенными в рассмотрение векторами устанавливает соотношение

$$\begin{vmatrix} \mu_{d1} \\ \mu_{d2} \\ \dots \\ \mu_{dn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} c_1^{(0)T} & D_{n1}^{(0)T} \\ c_2^{(0)T} & D_{n2}^{(0)T} \\ \dots & \dots \\ c_n^{(0)T} & D_{nn}^{(0)T} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} M_{vn}^{(0)} \\ F_{vn}^{(0)} \end{vmatrix}$$

$$\mu_d = - \Xi^{(0)T}(q) \begin{vmatrix} M_{vn}^{(0)} \\ F_{vn}^{(0)} \end{vmatrix}.$$

Видно, что матрица в правой части – транспонированная матрица-якобиан (п.3.8).

Последнее выражение определяет значения сил (моментов), которые должны развивать приводы для обеспечения равновесия ИМ под действием внешних сил и моментов, приложенных к последнему звену ИМ.

Из этого же выражения следует, что для того, чтобы определить силу $F_{Bn}^{(0)}$ и момент $M_{Bn}^{(0)}$, которые должен развивать МР на последнем звене, нужно воспользоваться последним выражением, поменяв знак минус на знак плюс.

Получившееся после смены знака выражение определяет закон управления МР по вектору силы.

2. Уравнения движения ИМ МР

2.1. Вывод уравнений движения

Уравнения движения ИМ позволяют определить параметры движения ИМ ($q_i, \dot{q}_i, \ddot{q}_i, i = 1, 2, \dots, n$) по известным силам и моментам, развивающимся приводами, а также по известным внешним силам и моментам. Решение этих уравнений определяет сущность **прямой задачи динамики ИМ** (часто говорят «задача динамики ИМ»). Для того, чтобы решить прямую задачу динамики ИМ, нужно составить соотношения, связывающие между собой μ_{di} , F_{Bj} , M_{Bj} и искомые параметры движения ИМ и разрешить их относительно искомых переменных. Теперь для этого подставим в последнее выражение п.1.5 выражения для расчета $\omega_j^{(0)}$ и $V_j^{(0)}$ и разрешим полученные соотношения относительно старших производных q_i .

Выполним эту подстановку:

$$\begin{aligned} \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} I_j^{(0)} \left(\sum_{k=1}^j c_k^{(0)} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^j c_k^{(0)} \ddot{q}_k \right) + \lambda(\omega_j^{(0)}) I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} + \\ \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} m_j \left(\sum_{k=1}^j D_{jk}^{(0)} \dot{q}_k + \sum_{k=1}^j D_{jk}^{(0)} \ddot{q}_k \right) = \mu_{di} + \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} M_{Bj}^{(0)} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} F_{Bj}^{(0)}. \end{aligned}$$

Обозначим сумму слагаемых в левой части полученного соотношения, содержащих производные обобщенных координат в первой степени, а также $\omega_j^{(0)}$ как b_i , т.е.

$$\sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} \left(I_j^{(0)} \sum_{k=1}^j c_k^{(0)} \dot{q}_k + \lambda(\omega_j^{(0)}) I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} \right) + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} m_j \sum_{k=1}^j D_{jk}^{(0)} \dot{q}_k = b_i.$$

(выше выделено синим цветом).

Оставшиеся слагаемые в левой части рассматриваемого соотношения, содержащие вторые производные обобщенных координат (выделено красным цветом), преобразуем следующим образом:

$$\sum_{j=i}^n \mathbf{c}_i^{(0)T} \mathbf{I}_j^{(0)} \sum_{k=1}^j \mathbf{c}_k^{(0)} \ddot{\mathbf{q}}_k + \sum_{j=i}^n \mathbf{D}_{ji}^{(0)T} m_j \sum_{k=1}^j \mathbf{D}_{jk}^{(0)} \ddot{\mathbf{q}}_k =$$

$$\sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \mathbf{c}_i^{(0)T} \mathbf{I}_j^{(0)} \mathbf{c}_k^{(0)} \ddot{\mathbf{q}}_k + \sum_{j=i}^n \sum_{k=1}^j \mathbf{D}_{ji}^{(0)T} m_j \mathbf{D}_{jk}^{(0)} \ddot{\mathbf{q}}_k.$$

Поменяем порядок суммирования (было $j \rightarrow k$, станет $k \rightarrow j$)

$$\begin{array}{lll} j = i & k = 1, 2, \dots, i. \\ j = i+1 & k = 1, 2, \dots, i, i+1. & \rightarrow k = 1, \dots, n, j = i, \dots, n \text{ при } k \leq i \\ \dots & \dots & j = k, \dots, n \text{ при } k > i \\ j = n & k = 1, 2, \dots, i, i+1, \dots, n \end{array}$$

получим

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=i \\ j=k \text{ if } k>i}}^n \mathbf{c}_i^{(0)T} \mathbf{I}_j^{(0)} \mathbf{c}_k^{(0)} \ddot{\mathbf{q}}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=i \\ j=k \text{ if } k>i}}^n \mathbf{D}_{ji}^{(0)T} m_j \mathbf{D}_{jk}^{(0)} \ddot{\mathbf{q}}_k.$$

Переименуем индексы ($j \leftarrow k$) и сгруппируем подобные члены:

$$\sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=i \\ j=k \text{ if } k>i}}^n \mathbf{c}_i^{(0)T} \mathbf{I}_j^{(0)} \mathbf{c}_k^{(0)} \ddot{\mathbf{q}}_k + \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{j=i \\ j=k \text{ if } k>i}}^n \mathbf{D}_{ji}^{(0)T} m_j \mathbf{D}_{jk}^{(0)} \ddot{\mathbf{q}}_k =$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=i \\ k=j \text{ if } j>i \\ k=j \text{ if } j>i}}^n \mathbf{c}_i^{(0)T} \mathbf{I}_k^{(0)} \mathbf{c}_j^{(0)} \ddot{\mathbf{q}}_j + \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=i \\ k=j \text{ if } j>i}}^n \mathbf{D}_{ki}^{(0)T} m_k \mathbf{D}_{kj}^{(0)} \ddot{\mathbf{q}}_j = \sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{\mathbf{q}}_j,$$

где обозначено:

$$a_{ij} = \sum_{k=i}^n (\mathbf{c}_i^{(0)T} \mathbf{I}_k^{(0)} \mathbf{c}_j^{(0)} + \mathbf{D}_{ki}^{(0)T} m_k \mathbf{D}_{kj}^{(0)}) = \sum_{k=\max(i,j)}^n (\mathbf{c}_i^{(0)T} \mathbf{I}_k^{(0)} \mathbf{c}_j^{(0)} + \mathbf{D}_{ki}^{(0)T} m_k \mathbf{D}_{kj}^{(0)}). \quad (4.3)$$

Запишем результат (4.3) отдельно

$$a_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n (\mathbf{c}_i^{(0)T} \mathbf{I}_k^{(0)} \mathbf{c}_j^{(0)} + \mathbf{D}_{ki}^{(0)T} m_k \mathbf{D}_{kj}^{(0)}). \quad (4.4)$$

С учетом выполненных преобразований и введенных обозначений первое выражение п.2.1 примет вид:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j + b_i = \mu_{di} + \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} M_{bj}^{(0)} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} F_{bj}^{(0)}, \quad (4.5)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Полученная система диф. уравнений описывает движение ИМ под действием внешних сил и моментов, а также сил и (или) моментов, развивающихся приводами шарниров. Физический смысл каждого из слагаемых в этом выражении – силы и моменты, действующие вдоль осей шарниров:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j - \text{часто называют "инерционными" силами или моментами, с}$$

которыми ИМ воздействует на оси шарниров,

b_i – центробежные и кориолисовы силы и моменты, действующие на оси шарниров,

$$\sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} M_{bj}^{(0)} - \text{моменты, действующие на оси шарниров;}$$

обусловлены внешними моментами, приложенными к звеньям ИМ,

$$\sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} F_{bj}^{(0)} - \text{силы и моменты, действующие на оси шарниров;}$$

обусловлены внешними силами, приложенными к звеньям ИМ,

μ_{di} – силы и моменты, развивающиеся приводами ИМ.

Последнюю систему можно представить в виде одного уравнения, если обозначить

$A = \{a_{ij}\}$ – матрица ($n \times n$) при вторых производных обобщенных координат ИМ (матрица инерционных коэффициентов, матрица инерции ИМ),

$b = [b_i]$ – вектор ($n \times 1$), ($i = 1, 2, \dots, n$),

$C^{(0)} = \{c_j^{(0)}\}$ – матрица ($3n \times n$),

$D^{(0)} = \{D_{ij}^{(0)}\}$ – матрица ($3n \times n$),

$\mu_d = [\mu_{di}]$, вектор ($n \times 1$), $i = 1, 2, \dots, n$,

$M_b^{(0)} = [M_{b1}^{(0)T} M_{b2}^{(0)T} \dots M_{bn}^{(0)T}]^T$ – вектор ($3n \times n$) с компонентами $M_{bj}^{(0)}$,

$F_b^{(0)} = [F_{b1}^{(0)T} F_{b2}^{(0)T} \dots F_{bn}^{(0)T}]^T$ – вектор ($3n \times n$) с компонентами $F_{bj}^{(0)}$.

Воспользовавшись сделанными обозначениями, получим:

$$A \ddot{q} + b = \mu_d + C^{(0)T} M_b^{(0)} + D^{(0)T} F_b^{(0)}. \quad (4.6)$$

Решив это уравнение относительно q_i , определим закон движения ИМ МР под действием внешних сил и моментов, а также сил и (или) моментов, развивающихся приводами шарниров.

2.2. Элемент b_i вектора b

С учетом выражений для $\dot{c}_k^{(0)}$ и $\sum_{k=1}^j D_{jk}^{(0)} \dot{q}_k$ элемент b_i можно

представить в виде

$$\begin{aligned}
 b_i = & \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} \left(I_j^{(0)} \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) c_k^{(0)} \dot{q}_k + \lambda(\omega_j^{(0)}) I_j^{(0)} \omega_j^{(0)} \right) + \\
 & \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} m_j (\lambda(\omega_j^{(0)}) \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} t_j + \\
 & \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) \lambda(\omega_k^{(0)}) \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) \dot{q}_k + l_k) + 2 \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) \dot{q}_k) + \\
 & \lambda \left(\sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) \tau_{0k} v_k \sigma_k \dot{q}_k \right) \tau_{0j} t_j + \sum_{l=1}^j \lambda \left(\sum_{k=1}^l \lambda(\omega_k^{(0)}) \tau_{0k} v_k \sigma_k \dot{q}_k \right) \tau_{0l} (v_l (1-\sigma_l) \dot{q}_l + l_l).
 \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Физический смысл b_i – сила или момент, действующие на оси шарниров при движении ИМ. Из представленного выражения видно, что b_i зависит от произведения (по 2 элемента) первых производных обобщенных координат. Слагаемые, входящие в b_i представляют собой центробежные силы, моменты от действия этих сил, а также кориолисовы силы и моменты от действия сил Кориолиса.

ЛЕКЦИЯ 12.

Фрагмент Л11, п.2.1.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j + b_i = \mu_{di} + \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} M_{bj}^{(0)} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} F_{bj}^{(0)}, \quad (1)$$

$i = 1, 2, \dots, n$.

Физический смысл каждого из слагаемых в этом выражении – силы и моменты, действующие вдоль осей шарниров:

$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j$ - часто называют “инерционными” силами или моментами, с

которыми ИМ воздействует на оси шарниров,

b_i – центробежные и кориолисовы силы и моменты, действующие на оси шарниров,

$\sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} M_{bj}^{(0)}$ – моменты, действующие на оси шарниров; обусловлены

внешними моментами, приложенными к звеньям ИМ,

$\sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} F_{bj}^{(0)}$ – силы и моменты, действующие на оси шарниров;

обусловлены внешними силами, приложенными к звеньям ИМ,

μ_{di} – силы и моменты, развивающиеся приводами ИМ.

Последнюю систему можно представить в виде одного уравнения, если обозначить

$A = \{a_{ij}\}$ – матрица ($n \times n$) при вторых производных обобщенных координат ИМ (матрица инерционных коэффициентов, матрица инерции ИМ), $A = A(q)$;

$b = [b_i]$ – вектор ($n \times 1$), ($i = 1, 2, \dots, n$), $b = b(q, \dot{q})$;

$C^{(0)} = \{c_j^{(0)}\}$ – матрица ($3n \times n$) (см. п.2.5.2), $C^{(0)} = C^{(0)}(q)$;

$D^{(0)} = \{D_{ij}^{(0)}\}$ – матрица ($3n \times n$) (см. п.2.9), $D^{(0)} = D^{(0)}(q)$;

$\mu_d = [\mu_{di}]$, вектор ($n \times 1$), $i = 1, 2, \dots, n$,

$M_B^{(0)} = [M_{B1}^{(0)T} M_{B2}^{(0)T} \dots M_{Bn}^{(0)T}]^T$ – вектор ($3n \times n$) с компонентами $M_{bj}^{(0)}$,

$F_B^{(0)} = [F_{B1}^{(0)T} F_{B2}^{(0)T} \dots F_{Bn}^{(0)T}]^T$ – вектор ($3n \times n$) с компонентами $F_{bj}^{(0)}$.

Воспользовавшись сделанными обозначениями, можем записать уравнение (1) так:

$$A \vec{q} + b = \mu_d + C^{(0)T} M_B^{(0)} + D^{(0)T} F_B^{(0)},$$

2.2. Свойства матрицы $A = \{a_{ij}\}$

а) Элемент a_{ij} есть:

сумма из $(n - \max(i,j) + 1)$ скалярных произведений вектора $c_i^{(0)}$ и вектора $c_j^{(0)}$, взятых с $I_k^{(0)}$ как с весовыми матрицами, причем k приобретает последовательно целочисленные значения из диапазона $\max(i,j) \leq k \leq n$

плюс

сумма из $(n - \max(i,j) + 1)$ скалярных произведений векторов $D_{ki}^{(0)}$ и векторов $D_{kj}^{(0)}$, взятых с m_k как с весовыми множителями, причем k приобретает последовательно целочисленные значения из диапазона $\max(i,j) \leq k \leq n$.

Действительно, по свойству скалярного произведения

$$\begin{aligned} c_i^{(0)T} I_k^{(0)} c_j^{(0)} &= c_i^{(0)} \cdot (I_k^{(0)} c_j^{(0)}), \\ D_{ki}^{(0)T} m_k D_{kj}^{(0)} &= D_{ki}^{(0)} \cdot (m_k D_{kj}^{(0)}). \end{aligned}$$

Число слагаемых в суммах и диапазоны суммирования легко устанавливаются из (4.3). Свойство а) удобно проиллюстрировать геометрически (рис.4.1 – случай $i>j$):

б) A – симметрическая матрица. Для этого нужно доказать, что $a_{ij} = a_{ji}$; а для этого достаточно показать, что

$$c_i^{(0)T} I_k^{(0)} c_j^{(0)} = c_j^{(0)T} I_k^{(0)} c_i^{(0)} \quad \text{и} \quad D_{ki}^{(0)T} m_k D_{kj}^{(0)} = D_{kj}^{(0)T} m_k D_{ki}^{(0)}.$$

Поскольку $c_i^{(0)T} I_k^{(0)} c_j^{(0)}$ – скаляр, то $(c_i^{(0)T} I_k^{(0)} c_j^{(0)})^T = c_i^{(0)T} I_k^{(0)} c_j^{(0)}$. С другой стороны выполнение предписанных действий транспонирования над $(c_i^{(0)T} I_k^{(0)} c_j^{(0)})^T$ дает $c_j^{(0)T} I_k^{(0)T} c_i^{(0)} = c_j^{(0)T} I_k^{(0)T} c_i^{(0)}$, что и служит доказательством.

Доказательство для $D_{ki}^{(0)T} m_k D_{kj}^{(0)}$ полностью аналогично.

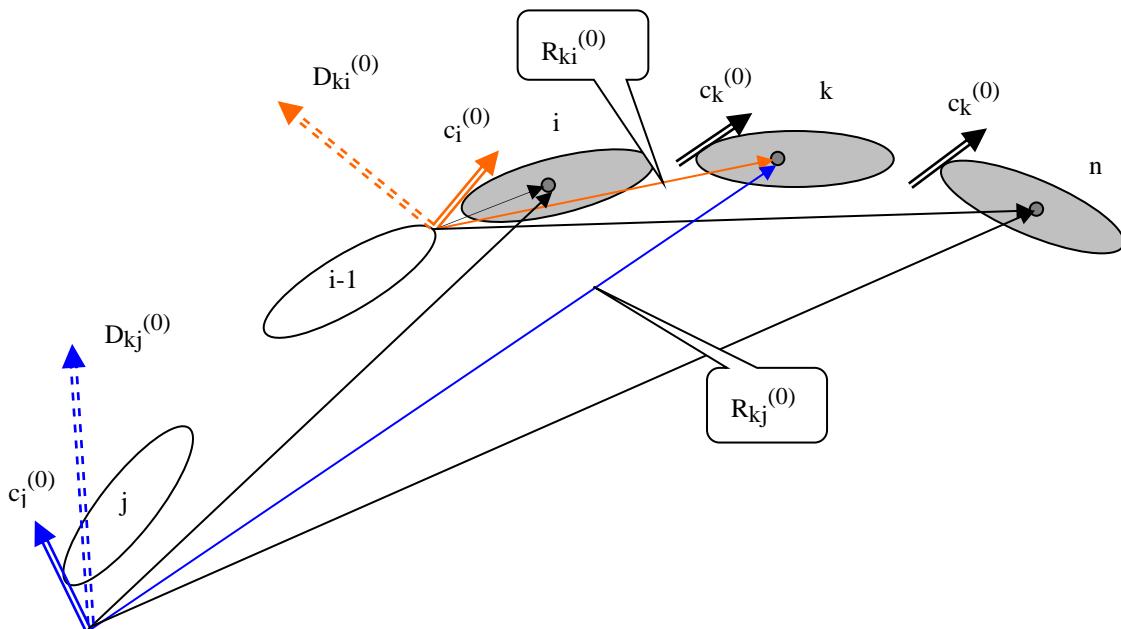


Рис.4.1. Геометрическая интерпретация соотношений для расчета элементов матрицы А.

в) А – положительно определенная матрица (т.е. $A > 0$).

Запишем выражение для кинетической энергии ИМ:

$$KE = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (V_j^{(0)T} m_j V_j^{(0)} + \omega_j^{(0)T} I_j^{(0)} \omega_j^{(0)}) = \\ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^j (c_k^{(0)T} I_j^{(0)} c_l^{(0)} + D_{jk}^{(0)T} m_j D_{jl}^{(0)}) q_k \dot{q}_l.$$

Изменим порядок суммирования:

$$\begin{array}{lll} j = 1 \quad k = 1 & l = 1 & -> \quad k = 1, \dots, n \\ j = 2 \quad k = 1, 2 & l = 1, 2 & l = k, \dots, n \\ j = 3 \quad k = 1, 2, 3 & l = 1, 2, 3 & j = k \text{ (или } l\text{), т.е. } = \max(k, l) \\ \dots & \dots & \dots \\ j = n \quad k = 1, 2, 3, \dots, n & l = 1, 2, 3, \dots, n & \end{array}$$

$$KE = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \sum_{j=\max(k,l)}^n (c_k^{(0)T} I_j^{(0)} c_l^{(0)} + D_{jk}^{(0)T} m_j D_{jl}^{(0)}) q_k \dot{q}_l = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} q_k \dot{q}_l.$$

Последнее выражение можно переписать так

$$KE = \frac{1}{2} \dot{q}^T A q.$$

По условиям физической реализуемости механической системы матрица квадратичной формы KE является положительно определенной. Поэтому А – положительно определенная матрица.

2.3. Свойства вектора $b = \{b_i\}$.

С учетом выражений для $c_k^{(0)}$ и $\sum_{k=1}^j D_{jk}^{(0)} q_k$ элемент b_i можно

представить в виде

$$b_i = \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} (I_j^{(0)} \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) c_k^{(0)} q_k + \lambda(\omega_j^{(0)}) I_j^{(0)} \omega_j^{(0)}) +$$

$$\sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} m_j (\lambda(\omega_i^{(0)}) \lambda(\omega_j^{(0)}) \tau_{0j} t_j +$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) \lambda(\omega_k^{(0)}) \tau_{0k} (v_k(1-\sigma_k)q_k + l_k) + 2 \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) \tau_{0k} (v_k(1-\sigma_k)q_k) + \\
& \lambda \left(\sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k^{(0)}) \tau_{0k} v_k \sigma_k q_k \right) \tau_{0j} t_j + \sum_{l=1}^j \sum_{k=1}^l \lambda(\omega_k^{(0)}) \tau_{0k} v_k \sigma_k q_k \tau_{0l} (v_l(1-\sigma_l) q_l + l_l).
\end{aligned}$$

Физический смысл b_i – сила или момент, действующие на оси шарниров при движении ИМ. Из представленного выражения видно, что b_i квадратично зависит от вторых производных обобщенных координат. Слагаемые, входящие в b_i представляют собой центробежные силы, моменты от действия этих сил, а также кориолисовы силы и моменты от действия сил Кориолиса.

2.4. Запись уравнений движения ИМ с использованием матриц поворота СК звеньев.

Уравнения движения получены с использованием компонент, определенных в СК₀ ($I_k^{(0)}$, $c_j^{(0)}$, $D_{kj}^{(0)}$, и т.д.). На практике чаще бывает удобно записать уравнения движения ИМ с использованием компонент, заданных в СК звеньев (I_k , $c_j^{(k)}$, D_{kj} и т.д.). Именно в СК звеньев заданы их параметры (I_k , l_k и др.). Для этого запишем $c_j^{(0)}$, $D_{kj}^{(0)}$ в системах координат, связанных со звеньями так

$$c_j^{(k)} = \tau_{k0} c_j^{(0)}, D_{kj}^{(k)} = \tau_{k0} D_{kj}^{(0)}.$$

Тогда, принимая во внимание, что

$$c_j^{(0)} = \tau_{0k} c_j^{(k)}, D_{kj}^{(0)} = \tau_{0k} D_{kj}^{(k)},$$

получим

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n a_{ij} q_j + b_i &= \mu_{di} + \sum_{j=i}^n c_i^{(j)T} M_{bj} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(j)T} F_{bj}, \\
i &= 1, 2, \dots, n
\end{aligned}$$

Выкладки здесь следующие.

$$a_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n (c_i^{(k)T} \tau_{k0} I_k^{(0)} \tau_{0k} c_j^{(k)} + D_{ki}^{(k)T} \tau_{k0} m_k \tau_{0k} D_{kj}^{(k)});$$

$$a_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n (c_i^{(k)T} I_k c_j^{(k)} + D_{ki}^{(k)T} m_k D_{kj}^{(k)}).$$

В развернутом виде $c_i^{(k)}$ и $D_{ki}^{(k)}$, $c_i^{(j)}$ и $D_{ji}^{(j)}$ имеют вид

$$c_i^{(k)} = \tau_{k0} c_i^{(0)} = \tau_{k0} (\tau_{0i} v_i \sigma_i) = \tau_{ki} v_i \sigma_i , \quad c_i^{(j)} = \tau_{ji} v_i \sigma_i$$

$$D_{ki}^{(k)} = \tau_{k0} D_{ki}^{(0)}$$

$$D_{ij}^{(0)} = \lambda(\tau_{0j} v_j \sigma_j) R_{ij}^{(0)} + \tau_{0j} v_j (1-\sigma_j) = \lambda(c_j^{(0)}) R_{ij}^{(0)} + \tau_{0j} v_j (1-\sigma_j),$$

$$R_{ij}^{(0)} = \tau_{0i} t_i + \sum_{k=j}^i \tau_{0k} (v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k).$$

$$D_{ki}^{(0)} = \lambda(\tau_{0i} v_i \sigma_i) R_{ki}^{(0)} + \tau_{0i} v_i (1-\sigma_i) = \lambda(c_i^{(0)}) R_{ki}^{(0)} + \tau_{0i} v_i (1-\sigma_i),$$

$$R_{ki}^{(0)} = \tau_{0k} t_k + \sum_{l=i}^k \tau_{0l} (v_l (1-\sigma_l) q_l + l_l).$$

$$D_{ki}^{(k)} = \tau_{k0} \lambda(\tau_{0i} v_i \sigma_i) R_{ki}^{(0)} + \tau_{k0} \tau_{0i} v_i (1-\sigma_i) = \lambda(\tau_{k0} c_i^{(0)}) \tau_{k0} R_{ki}^{(0)} + \tau_{k0} \tau_{0i} v_i (1-\sigma_i),$$

$$R_{ki}^{(0)} = \tau_{0k} t_k + \sum_{l=i}^k \tau_{0l} (v_l (1-\sigma_l) q_l + l_l).$$

$$\tau_{k0} R_{ki}^{(0)} = \tau_{k0} \tau_{0k} t_k + \sum_{l=i}^k \tau_{k0} \tau_{0l} (v_l (1-\sigma_l) q_l + l_l)$$

$$D_{ki}^{(k)} = \lambda(\tau_{ki} v_i \sigma_i) R_{ki}^{(k)} + \tau_{ki} v_i (1-\sigma_i),$$

$$R_{ki}^{(k)} = t_k + \sum_{l=i}^k \tau_{kl} (v_l (1-\sigma_l) q_l + l_l)$$

$$D_{ji}^{(j)} = \lambda(\tau_{ji} v_i \sigma_i) R_{ji}^{(j)} + \tau_{ji} v_i (1-\sigma_i),$$

$$R_{ji}^{(j)} = t_j + \sum_{l=i}^j \tau_{jl} (v_l (1-\sigma_l) q_l + l_l)$$

$$b_i = \sum_{j=i}^n c_i^{(j)T} (I_j \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k) c_k q_k + \lambda(\omega_j) I_j \omega_j) +$$

$$\sum_{j=i}^n D_{ji}^T m_j \lambda(\omega_j) \lambda(\omega_j) t_j +$$

$$\sum_{j=i}^n D_{ji}^T m_j \tau_{jk} (\sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k) \lambda(\omega_k) (v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k) + 2 \sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k) (v_k (1-\sigma_k) q_k + l_k)) +$$

$$\lambda \left(\sum_{k=1}^j \lambda(\omega_k) v_k \sigma_k q_k \right) t_j + \sum_{l=1}^j \lambda \left(\sum_{k=1}^l \lambda(\omega_k) v_k \sigma_k q_k \right) \tau_{kl} (v_l (1-\sigma_l) q_l + l_l).$$

Используется обозначение

τ_{k0} $I_k^{(0)}$ $\tau_{0k} = I_k$ – тензор инерции звена k , заданный в СК $_k$, совмещенной с центром масс этого же звена.

Отличие такого подхода (СК звеньев) от изложенного выше подхода (через СК $_0$) к составлению *уравнений динамики* – большее разнообразие используемых при записи уравнений матриц вида τ_{kl} . Это удобно, в основном, при программировании для ЭВМ.

Нужно иметь в виду, что при решении *уравнений кинематики* (линейные и угловые координаты, а также угловые и линейные скорости звеньев) используются матрицы вида τ_{0j} и все вычисления производятся относительно базовой СК $_0$, а именно

$$t_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \tau_{0j} (v_j (1-\sigma_j) q_j + l_j) + \tau_{0i} t_i$$

$$(P_i, Y_i, R_i) = f(\tau_{0i})$$

$$\omega_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i \tau_{0j} v_j \sigma_j q_j$$

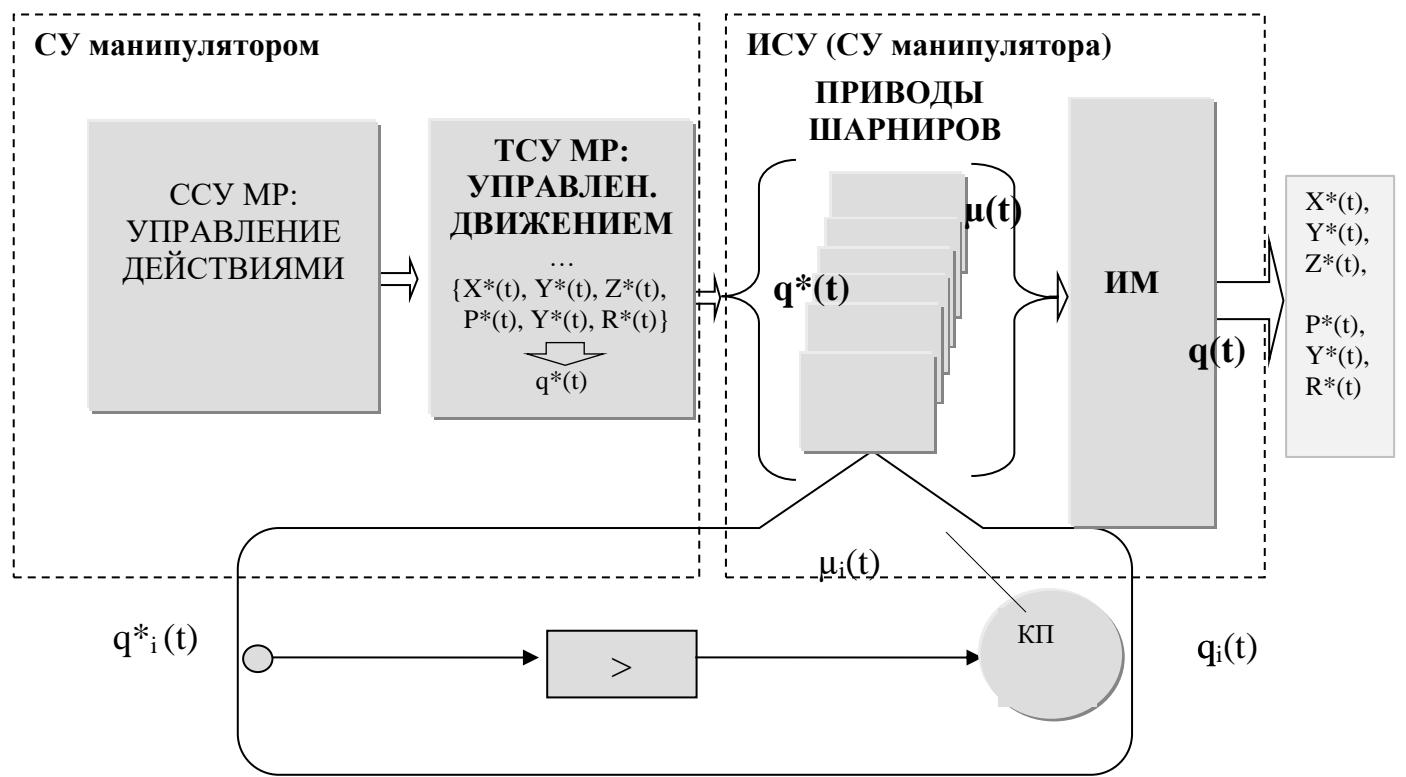
$$V_i^{(0)} = \sum_{j=1}^i D_{ij}^{(0)} q_j$$

3. ИМ МР как объект управления

СУ МР включает 3 уровня (Л1): ССУ, ТСУ, ИСУ.

В части ТСУ: ОКЗ, ПКЗ.

В части ИСУ: ИМ как объект управления.



ЛЕКЦИЯ 13

ИМ как объект управления ИСУ (продолжение)

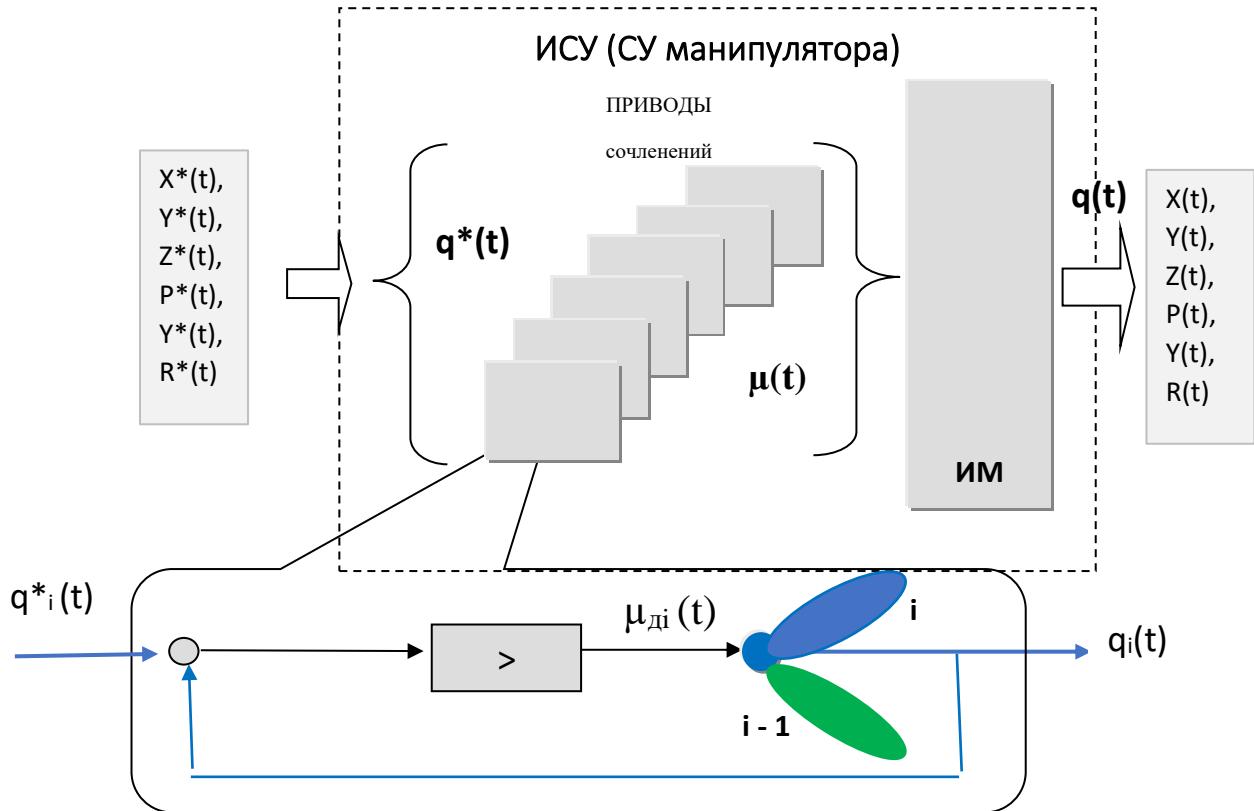


Рис. 1. Общая структурная схема ИСУ

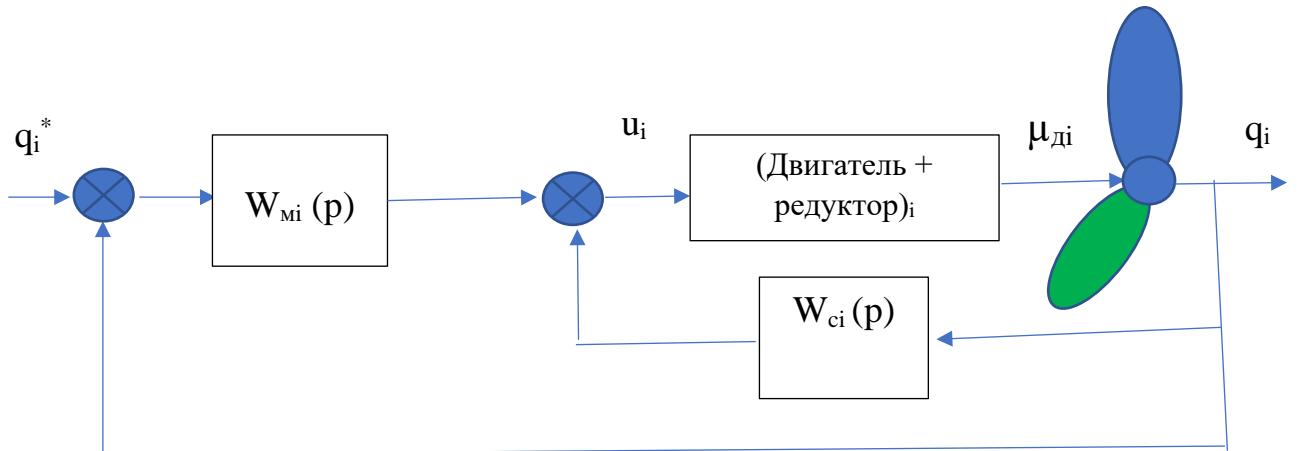


Рис. 2. Структурная схема одного отдельно взятого привода ИСУ

13.1. Матрица инерции системы приводов ИСУ

Динамика МР (в части механики) не ограничивается только ИМ. В составе МР – приводы – мехатронные системы, элементами которых

являются также двигатели (их роторы) и редукторы. Их необходимо учесть в расчетах.

Учитываем инерцию ротора двигателя и редуктора (ДиР). В этом случае выражение для КЕ Системы ИМ+ДиР запишется так

$$KE_c = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n a_{kl} q_k q_l + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_{dk} g_{dk}^2 (q_k q_k),$$

где I_{dk} , g_{dk} - момент инерции системы ДиР_k и передаточное число редуктора ($\sigma_k = 1$) или m_{dk} - приведенная к валу нагрузки масса движущихся частей системы ДиР_k ($\sigma_k = 0$).

Последнее выражение можно переписать так

$$KE_c = \frac{1}{2} q^T (A + \text{diag}(I_{d1} g_{d1}^2 I_{d2} g_{d2}^2 \dots I_{dn} g_{dn}^2)) q.$$

Поэтому матрица инерции системы ИМ+ДиР принимает вид

$$A_c = A + \text{diag}(I_{d1} g_{d1}^2 I_{d2} g_{d2}^2 \dots I_{dn} g_{dn}^2) \quad (1)$$

Очевидно, свойства матрицы A_c полностью совпадают со свойствами матрицы инерции ИМ, установленными ранее.

Далее при рассмотрении свойств *ИМ как нагрузки приводов ИСУ* в качестве матрицы инерции ИМ будем рассматривать матрицу вида (1).

В этой матрице

$$a_{ii} = \sum_{k=i}^n (c_i^{(0)T} I_k^{(0)} c_i^{(0)} + D_{ki}^{(0)T} m_k D_{ki}^{(0)} + I_{di} g_{di}^2). \quad (2)$$

Здесь и ниже (ИМ как нагрузка приводов ИСУ) для краткости специальные обозначения для a_{ii} вводить не будем. С учетом сказанного (выражение (2)) уравнение динамики Системы ИМ+ДиР будем рассматривать в виде

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j + b_i = \mu_{di} + \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} M_{bj}^{(0)} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} F_{bj}^{(0)}. \quad (3)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Перепишем уравнение (3) так

$$a_{ii} \ddot{q}_i + b_i - \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} M_{bj}^{(0)} - \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} F_{bj}^{(0)} = \mu_{di} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \ddot{q}_j$$

и в виде (4)

$$a_{ii} \dot{q}_i + b_i - \mu_{bi} = \mu_{di} - \mu_{bij} \quad (4)$$

где

$$\mu_{bi} = \sum_{j=1}^n (c_i^{(0)T} M_{bj}^{(0)} + D_{ji}^{(0)T} F_{bj}^{(0)}),$$

$$\mu_{bij} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \dot{q}_j.$$

13.2. Перекрестные связи между приводами (линейная постановка)

Уравнению (4) соответствует структурная схема

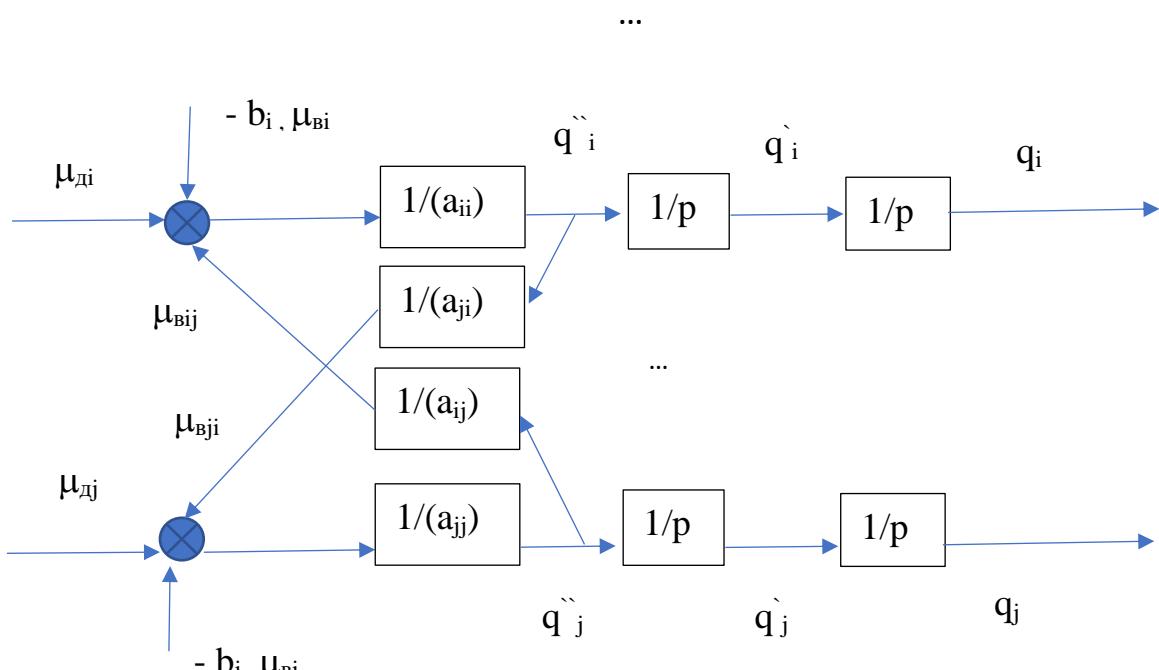


Рис.3.

Налицо перекрестные связи между отдельными каналами. На рис. 3 - только между каналами i и j . В действительности такие связи имеют место между несколькими каналами.

Нужно иметь в виду, что b_i, μ_{bi} являются нелинейными функциями \dot{q}_k , q_k . Это приводит к появлению нелинейных связей как внутри отдельных каналов, так перекрестных связей между каналами.

Изучение влияния всех этих связей на динамику ИСУ выходит за рамки нашей программы.

Мы затронем только начальную часть исследований динамики ИСУ как многомерной системы. При этом будем полагать, что свойства СП при отбрасывании всех нелинейных связей нам известны. Я имею в виду анализ и синтез СП как отдельно взятых систем.

В отношении таких систем структурная схема одного ОВП в линейном приближении примет вид

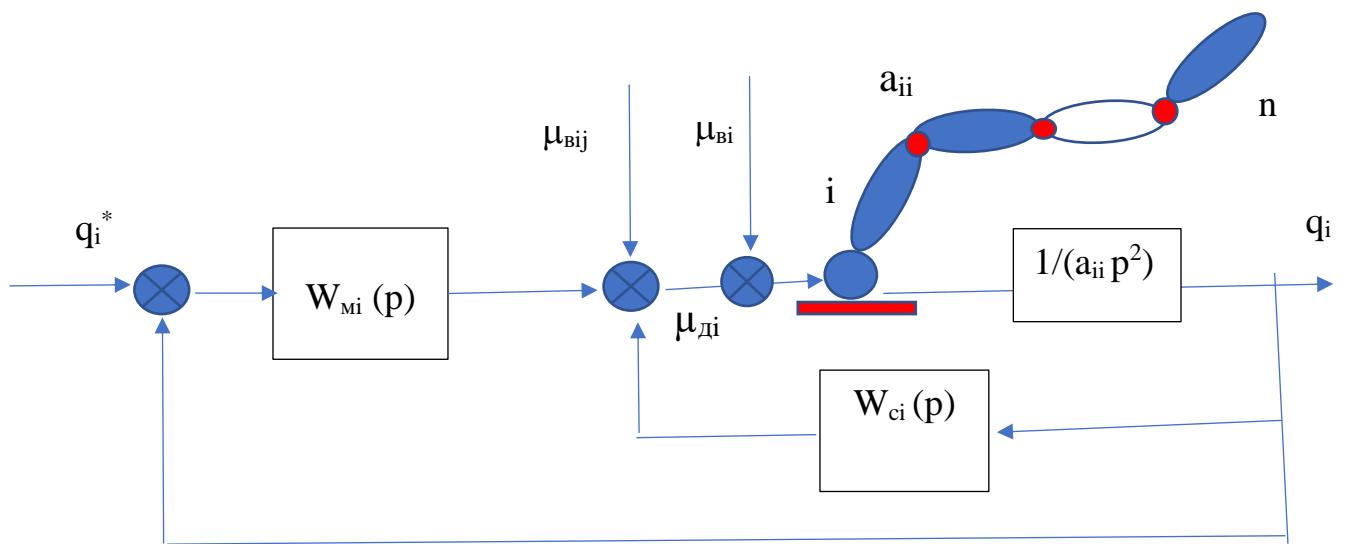


Рис.4. Структурная схема одного отдельно взятого привода

Нагрузка такой системы – это ИМ со всеми заторможенными приводами, кроме i -го вычисляется по формуле (2)

$$a_{ii} = (.)$$

Полагаем, что про такую систему знаем и умеем всё (синтез, анализ, устойчивость, выбор средств коррекции и т.д.). В этой связи полагаем известными и свойства СП (в части устойчивости) по отношению к μ_{bij} как к входному сигналу. Выход этой системы – координата q_i . Полагаем систему асимптотически устойчивой.

ПФ такой системы имеет вид

$$W_{ii}(p) = M_i(p) / N_i(p)$$

и связывает между собой точки μ_{bij} и q_i

$$q_i = W_{ii}(p) \mu_{bij}$$

Аналогично для μ_{bji} и q_j

$$W_{jj}(p) = M_j(p) / N_j(p),$$

$$q_j = W_{jj}(p) \mu_{bj} .$$

$N_i(p), N_j(p)$ – полиномы от p , все корни которых имеют отрицательную вещественную часть.

13.3. Взаимовлияние на примере двух приводов. Устойчивость приводов ИСУ в условиях взаимовлияния.

Будем считать, что среди всех n приводов ИМ не заторможены только приводы с номерами i и j . Принимая во внимание перекрестные связи между приводами рассмотрим систему в виде последовательного соединения звеньев с ПФ $W_{ii}(p)$ и ПФ $a_{ij}^2 p^4 W_{jj}(p) = M_j(p) a_{ij}^2 p^4 / N_j(p)$.

ПФ такой системы в разомкнутом состоянии

$$\begin{aligned} W_{kij}(p) &= - (M_j(p) a_{ij}^2 p^4 / N_j(p)) (M_i(p) / N_i(p)) = \\ &= - (M_j(p) M_i(p) a_{ij}^2 p^4) / (N_j(p) N_i(p)) = \\ &= - W_{ii}(p) W_{jj}(p) a_{ij}^2 p^4. \end{aligned} \quad (5)$$

Матрица A – симметрическая, поэтому вместо a_{ij} a_{ji} пишем a_{ij}^2 .

Полином знаменателя образовавшейся системы после замыкания единичной обратной связью

$$N_{kij}(p) = - M_j(p) M_i(p) a_{ij}^2 p^4 + N_j(p) N_i(p).$$

Полином знаменателя до замыкания

$$N_j(p) N_i(p)$$

Отношение полинома системы после замыкания единичной обратной связью к полиному разомкнутой системы запишется так

$$(- M_j(p) M_i(p) a_{ij}^2 p^4 + N_j(p) N_i(p)) / (N_j(p) N_i(p)) = - W_{kij}(p) + 1.$$

В силу того, что полином разомкнутой системы не содержит корней в правой плоскости и на мнимой оси, для устойчивости системы в замкнутом состоянии необходимо и достаточно, чтобы годограф функции $1 - W_{kij}(j\omega)$ при $-\infty \leq \omega \leq \infty$ не совершает вокруг начала координат ни одного оборота.

Другая формулировка – годограф функции $-W_{kij}(j\omega)$ при изменении ω в пределах $0 \leq \omega < \infty$ не должен охватывать точку $(-1, j0)$.

Можно заметить, что замыкание системы приводит к появлению положительной обратной связи. Однако степень влияния эффектов взаимодействия приводов через ИМ можно установить только в результате выполнения соответствующих расчетов, в том числе – за счет надлежащего выбора средств коррекции каждого из приводов.

Выполним приближенный (качественный) анализ динамики системы двух взаимодействующих приводов. Для простоты и наглядности примем

$$W_{ci}(p) \approx k_{ci} p, \quad W_{mi}(p) \approx k_{mi}.$$

Тогда

$$W_{ii}(p) \approx 1/(a_{ii} p^2 + k_{ci} p + k_{mi}),$$

$$W_{kij}(p) \approx -a_{ij}^2 p^4 / ((a_{ii} p^2 + k_{ci} p + k_{mi})(a_{jj} p^2 + k_{cj} p + k_{mj})).$$

Применим метод обратных ЛАЧХ. Обратная к $W_{kij}(p)$ ПФ (ОПФ)

$$W^{-1}_{kij}(p) \approx -((a_{ii} p^2 + k_{ci} p + k_{mi})(a_{jj} p^2 + k_{cj} p + k_{mj})) / (a_{ij}^2 p^4).$$

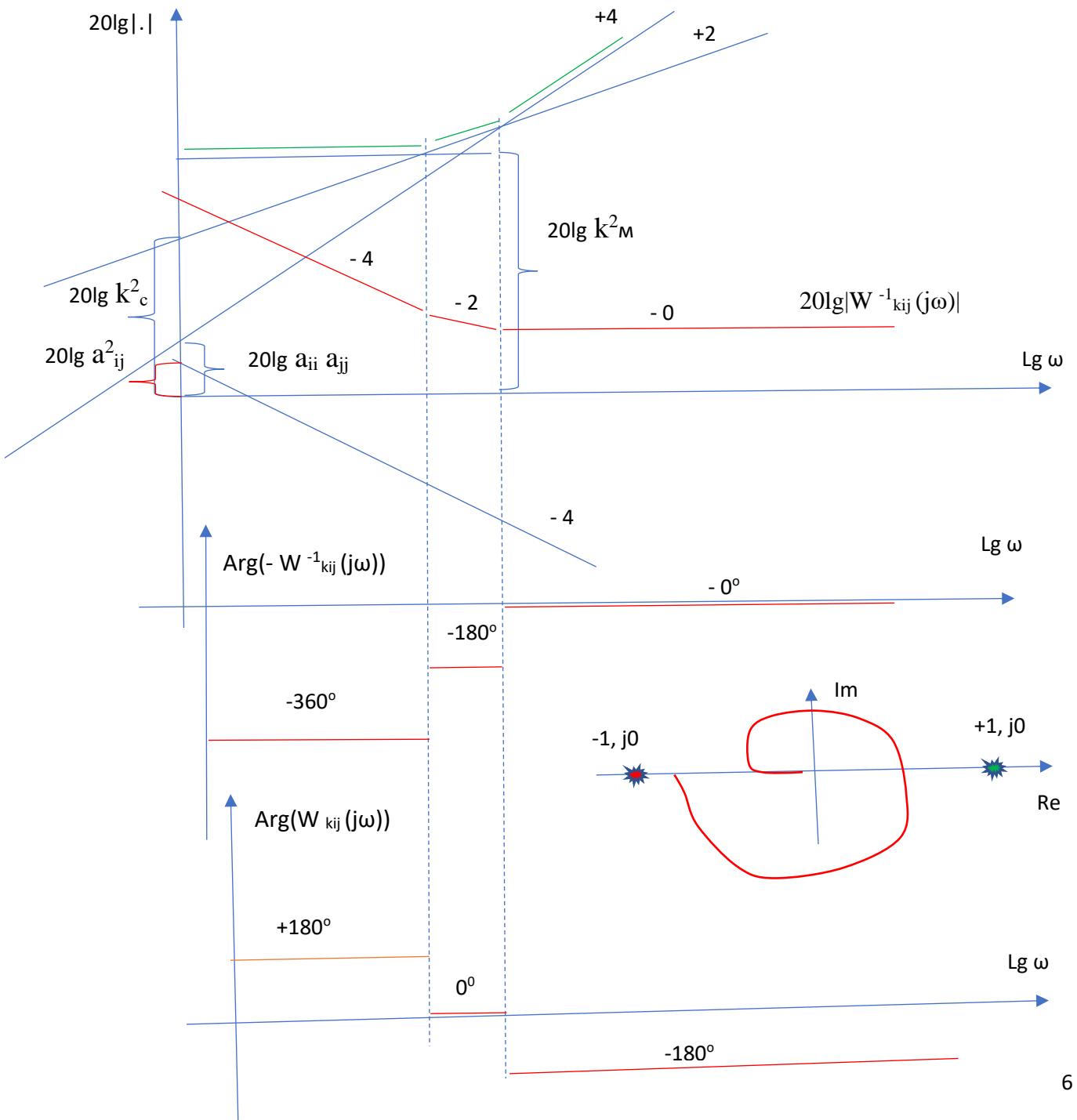


Рис.5. Обратные ЛАЧХ приводов и каналов взаимовлияния

На верхнем графике синие с положительным и нулевым наклоном линии соответствуют графикам асимптот функций $20 \lg |W^{-1}_{ii}(j\omega)| + 20 \lg |W^{-1}_{jj}(j\omega)|$.

В примере для наглядности принято следующие допущения $k_{ci} = k_{cj} = k_c$; $k_{mi} = k_{mj} = k_m$.

Зеленая линия – обратная ЛФЧХ $20 \lg |W^{-1}_{ii}(j\omega)| + 20 \lg |W^{-1}_{jj}(j\omega)|$.

Синяя линия с отрицательным наклоном – ЛАЧХ $20 \lg |1/[a^2_{ij}(j\omega)^4]|$.

Красные линии соответствуют ЛАЧХ $20 \lg |W^{-1}_{kij}(j\omega)|$.

В средней и нижней части рисунка приведены графики аргументов $\text{Arg}(W^{-1}_{kij}(j\omega))$, соответствующих функциям $20 \lg |W^{-1}_{kij}(j\omega)|$.

Расчет значения аргументов для различных участков графика следующий:

- в области, где наклон асимптоты $20 \lg |W^{-1}_{kij}(j\omega)|$ равен -4, $\arg W_{kij} = -(-360^\circ) - 180^\circ = 180^\circ$.

- в области, где наклон асимптоты $20 \lg |W^{-1}_{kij}(j\omega)|$ равен -2, $\arg W_{kij} = -(-180^\circ) - 180^\circ = 0^\circ$.

- в области, где наклон асимптоты $20 \lg |W^{-1}_{kij}(j\omega)|$ равен -0, $\arg W_{kij} = -(-0^\circ) - 180^\circ = -180^\circ$.

Примерный вид годографа функции $W_{kij}(p)$ приведен в средней части рисунка. Из приведенных графиков видно, что система из двух приводов ИМУ асимптотически устойчива (при этом устойчив каждый отдельно взятый привод).

При построении графиков мы учли, что согласно свойств матрицы A имеет место соотношение $a_{jj} > a_{ij}^2$.

В обобщенном виде получаем

$$|W^{-1}_{kij}(j\infty)| = a_{ii} a_{jj} / a_{ij}^2 > 1.$$

$$|W_{kij}(j\infty)| = a_{ij}^2 / a_{ii} a_{jj} < 1.$$

$$|W_{kij}(j0)| = 0.$$

Годограф функции взаимовлияния имеет начальную точку с координатами $(0, j0)$, последнюю точку на отрезке $(-1, j0)$. Это – необходимое условие устойчивости – оно выполняется всегда.

Можно видеть, что уровень динамического взаимовлияния уменьшается по мере уменьшения частоты. По мере увеличения частоты уровень взаимовлияния увеличивается и при $\omega \rightarrow \infty$ стремится к значению $|W_{kij}(j\infty)| = a_{ij}^2 / a_{ii} a_{jj}$. При этом $\arg W_{kij}(j\infty) = -180^\circ$.

Мы рассмотрели в линейном приближении взаимодействие только 2-х приводов. Отметим, что существуют методы анализа устойчивости многомерных линейных систем в общем случае (число каналов равно n – по числу звеньев ИМ). Вопросы динамики и устойчивости таких систем будут рассмотрены позже.

ЛЕКЦИЯ 14. ОВП в условиях взаимовлияния (продолжение)

Вернемся к вопросу динамики многомерной ИСУ МР на примере двухзвенного ИМ (или одновременной работы только 2-х приводов с номерами i и j в составе n -мерного ИМ). ПФ i -го отдельно взятого СП системы из 2-х приводов в упрощенном виде в линейном приближении имеет вид

$$w_i(p) \approx k_{Mi} / (a_{ii} p^2 + k_{ci} p + \beta_i k_{Mi}).$$

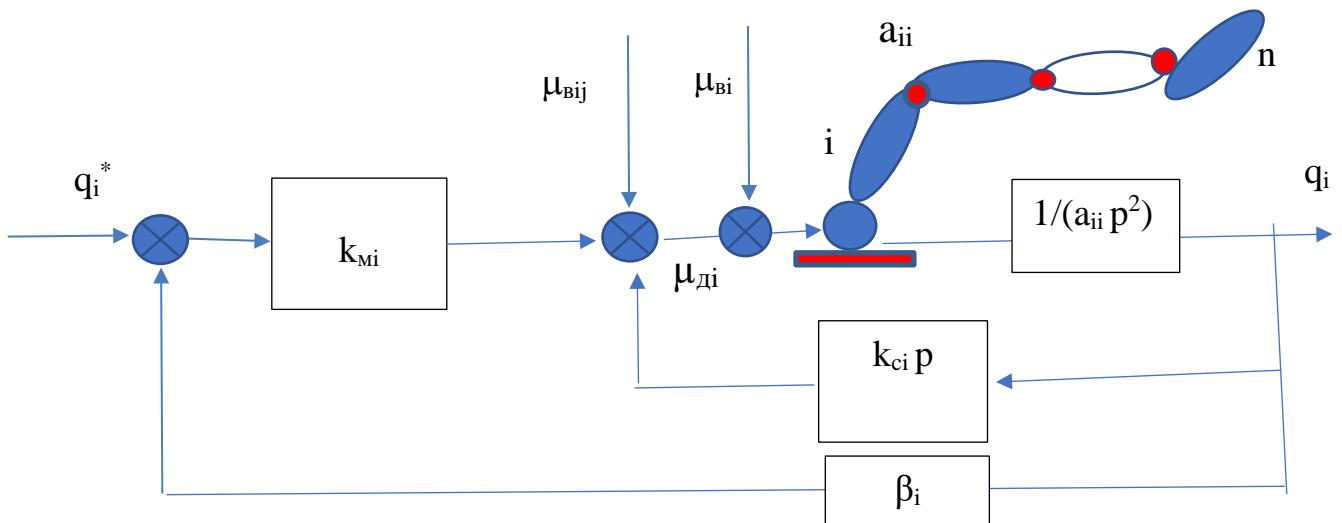


Рис.14.1. Структура i -го отдельно взятого СП (ОВП) n -мерного ИМ. Нагрузка такого привода – элемент a_{ii} матрицы А и включает массогабаритные параметры звеньев от i до n в заторможенном состоянии.

β_i – коэффициент, принимающий значения 0 или 1 в зависимости от того, замкнут приводов по положению или нет.

ПФ этого же привода с учетом того, что одновременно с ним включен привод j может быть вычислена как элемент $w_{ij}(p)$ матрицы $W(p)$ в выражении

$$W(p)q = K_m q^*$$

или в развернутом виде

$$\begin{Bmatrix} a_{ii} p^2 + k_{ci} p + k_{Mi} \beta_i & a_{ij} p^2 \\ a_{ji} p^2 & a_{jj} p^2 + k_{cj} p + k_{Mj} \beta_j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i \\ q_j \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{Mi} & 0 \\ 0 & k_{Mj} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} q_i^* \\ q_j^* \end{Bmatrix}$$

Обозначения ясны из предыдущей формулы.

ПФ ОВП $W_i(p)$ имеет вид (см. выше)

$$w_i(p) \approx k_{Mi} / (a_{ii} p^2 + k_{ci} p + k_{Mi} \beta_i).$$

ПФ этого же СП с учетом взаимовлияния будет иметь вид

$$w_{ii}(p) = \text{adj } W(p)_{ii} / \det W(p).$$

Составим отношения

$$r_{ii}(p) = w_{ii}(p) / w_i(p).$$

Вычислим его

$$\begin{aligned} r_{ii}(p) &= (\text{adj } W(p)_{ii} / (\det W(p)) w_i(p)) = \\ &= (a_{jj} p^2 + k_{cj} p + k_{mj} \beta_j) (a_{ii} p^2 + k_{ci} p + \beta_i k_{Mi}) / \\ &[(a_{ii} p^2 + k_{ci} p + k_{Mi} \beta_i) (a_{jj} p^2 + k_{cj} p + k_{mj} \beta_j) - a_{ji}^2 p^4]. \end{aligned}$$

Рассмотрим асимптотические свойства функции $r_{ii}(j\omega)$ при $\omega \rightarrow 0$ и $\omega \rightarrow \infty$.

При $\omega \rightarrow 0$

$$r_{ii}(0) \approx k_{mj} \beta_j / (k_{Mi} \beta_i k_{mj} \beta_j) \approx 1.$$

Это значит, что в НЧ области ЧХ $w_{ii}(j\omega)$ и $w_i(j\omega)$ практически совпадают.

Эту область можно распространить на диапазон, где доминируют компоненты $|k_{cj} * j\omega|$, т.е. область средней частоты. Это допущение имеет место при соответствующем выборе параметров средств коррекции.

В ВЧ области

$$r_{ii}(j\omega) \approx (a_{jj} a_{ii}) / (a_{ii} a_{jj} - a_{ji}^2) > 1,$$

что свидетельствует о сдвиге вверх ЧХ ОВП. Это приводит к ухудшению фильтрующих свойств.

Поскольку $\arg(\text{adj}(A)_{ii} a_{ii} / \det(A)) = 0$, то в высокочастотной области

$$\arg W_{ii}(j\omega) \approx \arg W_i(j\omega),$$

т.е. фазо-частотные характеристики отдельно взятых приводов не изменяются. Сдвиг АЧХ вверх свидетельствует об ухудшении фильтрующих свойств приводов. Кроме того, подъем АЧХ может отрицательно повлиять на запасы устойчивости приводов.

Связь АЧХ и ФЧХ отдельно взятых приводов и приводов в составе ИС МР можно проиллюстрировать графически (рис.14.2 и 14.3). Аналитически определить вид частотных характеристик в среднечастотной области очень сложно. Вычисления с помощью ЭВМ позволяют установить, что в этой области АЧХ имеют несколько подъемов, а ФЧХ приводов ИС отклоняются от ФЧХ отдельных приводов и вверх, и вниз.

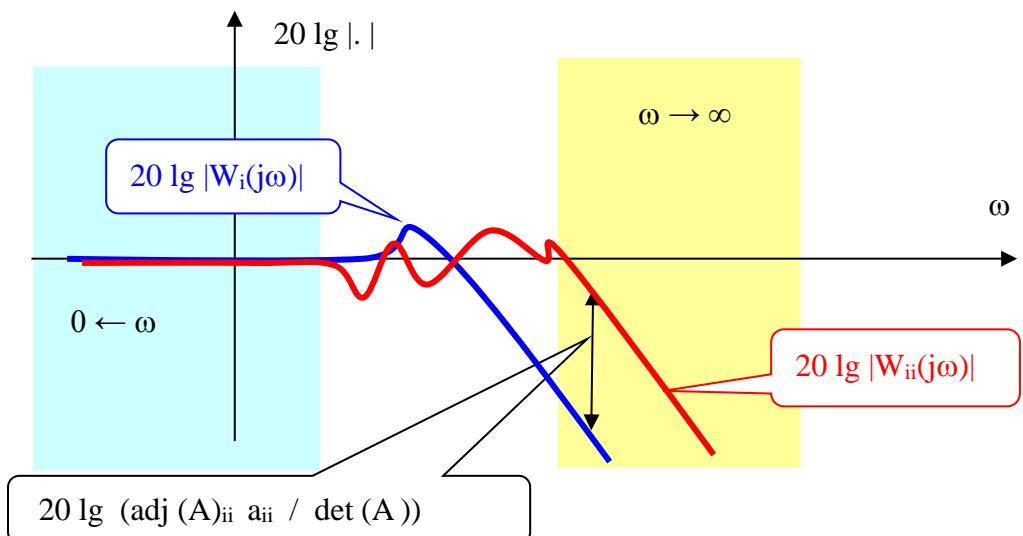


Рис.14.1. Примерный вид АЧХ отдельно взятого привода i -го шарнира МР и АЧХ i -го привода ИСУ МР

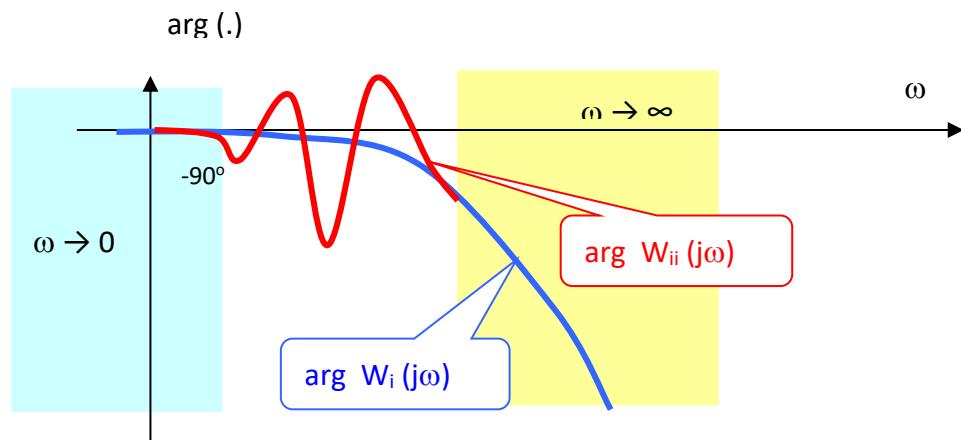


Рис. 14.2. Примерный вид ФЧХ отдельно взятого привода i -го шарнира МР и ФЧХ i -го привода ИСУ МР

Всё это свидетельствует о появлении нескольких резонансных частот, которых нет в спектрах отдельно взятых приводов. Появление резонансных частот указывает на возможность возникновения в ИСУ МР автоколебаний.

Вид ЧХ в этой области зависит от параметров матричных передаточных функций W_m и W_c , которые, в свою очередь, зависят от параметров неизменяемой части и от параметров корректирующих устройств.

Таким образом, предварительный анализ указывает на возможность искажения динамических свойств ОВП, обусловленного динамическим взаимовлиянием. Взаимовлияние приводов исполнительной системы МР вытекает из физической природы и является неотъемлемым свойством этих систем. Анализ асимптотических свойств ЧХ показывает, что при соблюдении условий диагональной доминантности обратной матричной передаточной функции системы приводов в НЧ области, параметрами, определяющими взаимовлияние, будут матрица A и соотношение элементов матрицы $A\omega^2$ и матриц $W_m(j\omega)$ и $W_c(j\omega)$. Взаимовлияние проявляется, начиная с определенной частоты, вплоть до бесконечности. Взаимовлияние в ВЧ области существует всегда, т.е. совсем от него избавиться невозможно, за исключением (гипотетических) случаев, когда $|W_m(j\omega)|$ или $|W_c(j\omega)|$ в ВЧ области пропорциональны ω^2 .

Можно высказать предположение, что существуют такие соотношения между $A\omega^2$ и матрицами $W_m(j\omega)$ и $W_c(j\omega)$, что взаимовлияние проявляется, начиная с такой «сверхвысокой частоты», что (учитывая естественные фильтрующие свойства приводов в этой СВЧ области) практически оно не заметно. Тогда синтез и анализ ИСУ МР можно проводить по моделям ОВП.

Можно также предположить, что уровень взаимовлияния различен и зависит от того, насколько матричная передаточная функция $A(j\omega)^2 + c + W_m(j\omega)\beta + W_c(j\omega)j\omega$ является диагонально доминантной.

Таким образом, можно предложить следующую последовательность действий при динамическом анализе и синтезе приводов:

1. Предполагаем, что взаимовлияния нет, и синтезируем приводы как обычно.
2. Проверяем уровень взаимовлияния.
3. Если взаимовлияние невысокое, заканчиваем динамический синтез и идем на следующий этап, например, расчет динамической коррекции программного движения.
4. Если взаимовлияние высокое, предпринимаем специальные меры компенсации взаимовлияния; для этого либо изменяем параметры введенной коррекции, либо вводим дополнительные средства коррекции.

В качестве критериев оценки уровня взаимовлияния СП можно – частотные критерии Найквиста для многомерных динамических систем.