

**Московский государственный технический университет
им.Н.Э.Баумана**

**Факультет
Специального машиностроения**

**Кафедра
Специальная робототехника и мехатроника**

Лесков А.Г.

**Проектирование исполнительных систем манипуляционных
роботов**

**Конспект лекций по курсу
«ПРОЕКТИРОВАНИЕ РОБОТОТЕХНИЧЕСКИХ СИСТЕМ»**

**г.Москва
2005 г**

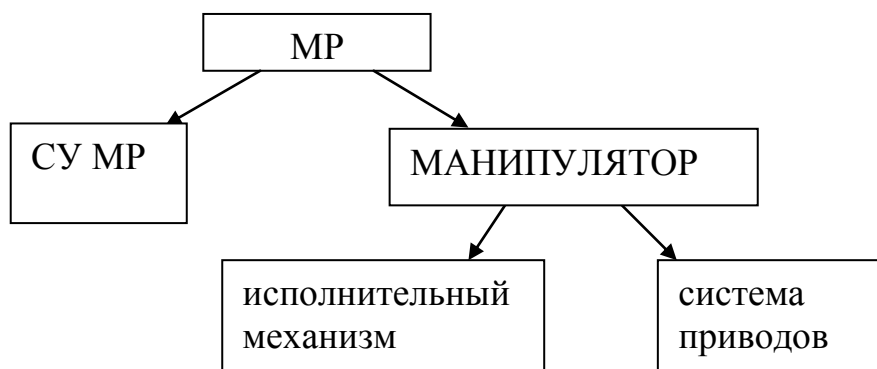
ВВЕДЕНИЕ

Объекты курса – исполнительные системы управления манипуляционных роботов (МР). Манипуляционные роботы – одна из разновидностей РТС. Как и ранее, мы будем полагать, что МР – мехатронные системы, предназначенные для выполнения действий, аналогичных действиям человека при его работе руками.

Что такое ИСУ?

Конструктивно, в составе МР – манипулятор и СУ МР.

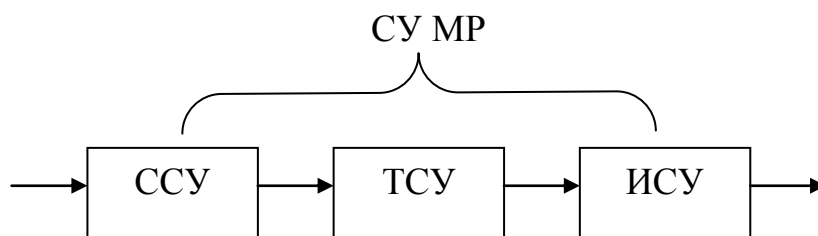
Манипулятор включает исполнительный механизм и систему приводов шарниров.



ИМ – система преобразования движения отдельных звеньев в движение рабочего органа (ЗУМ) МР.

Система приводов (как правило, размещены в суставах МР) обеспечивает движение ИМ шарнирах. Именно и только благодаря приводам осуществляется перемещение манипулятора в пространстве.

СУ МР обеспечивает функционирование МР в соответствии с теми или иными заданиями и может быть представлена состоящей из ИСУ, ТСУ и ССУ.

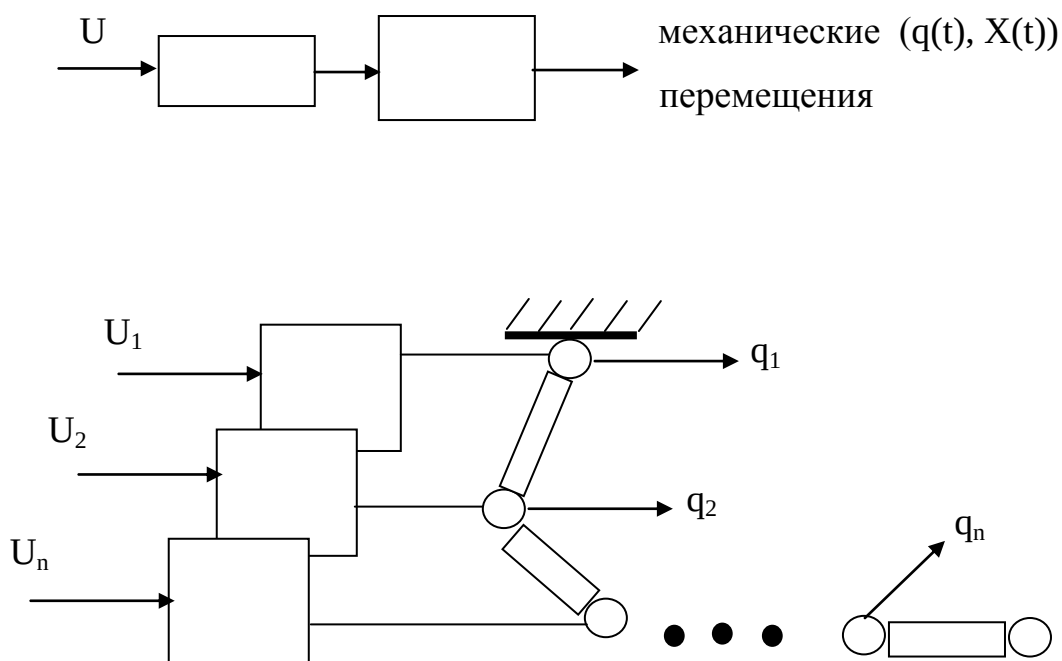


ТСУ – тактическая СУ (управление движением МР); ТСУ формирует сигналы управления на входах приводов ИСУ.

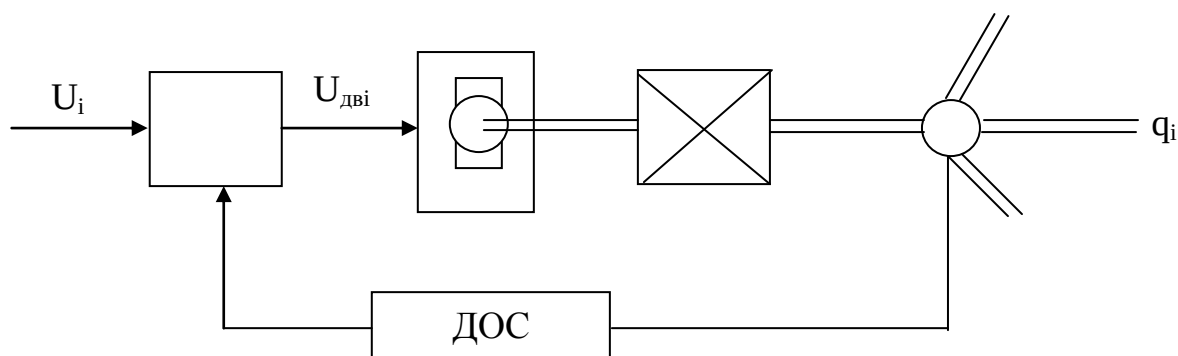
ССУ – стратегическая СУ – обеспечивает управление действиями МР; ССУ формирует сигналы управления на входе ТСУ (обычно, это координаты ЗУМ в рабочем пространстве).

Исполнительная СУ (ИСУ) – система управления манипулятора МР, часть СУ МР.

ИСУ МР обеспечивает преобразование (электрических) сигналов управления высших уровней СУ (на входах СП, некоторый вектор U) в механические перемещения рабочего органа МР (ЗУМ).



Мы будем рассматривать замкнутые (слеящие) приводы. Структурно отдельный привод можно представить в следующем виде.



Предмет курса – проектирование ИСУ МР.

Проектирование ИСУ – совокупность действий и мероприятий, в ходе выполнения которых осуществляется преобразование данных ТЗ на ИСУ в технические решения, обеспечивающие выполнение требований на практике.

Проектированию ИСУ предшествует этап конструирования манипулятора. Поэтому предполагаются уже известными конструктивные и массогабаритные параметры манипулятора, а именно

- число звеньев (шарниров) ИМ (n),
- вид шарниров (вращательные или поступательные – σ_i),
- длины звеньев l_i ,
- углы начальной установки осей шарниров ($\alpha_i \beta_i \gamma_i$)
- координаты центров масс звеньев (r_i),
- массы звеньев m_i (в том числе – массы ПГ),
- тензоры инерции звеньев (I_i),
- параметры, определяющие жесткость звеньев.

Все перечисленные параметры задаются в связанных со звеньями системах координат.

Перечисленные параметры входят в состав исходных данных на проектирование ИСУ.

ТЗ на проектирование ИСУ включает:

- законы движения ЗУМ, которые должна обеспечивать ИСУ, их параметры,
- допустимые ошибки при движении МР по заданным законам (точность статическая и динамическая).

Вообще данные ТЗ на ИСУ включают требования не только к функциональным, но и к эксплуатационным характеристикам ИСУ.

К функциональным относятся указанные выше законы движения и допустимые ошибки из реализации.

Эксплуатационные характеристики – надежность, ремонтпригодность и др.

Как уже упоминалось выше, этапу проектирования ИСУ предшествует конструирование манипулятора МР.

При конструировании манипулятора производится:

- выбор кинематической схемы ИМ МР (число – n и тип σ_i шарниров),
- выбор геометрических параметров звеньев (l_i),
- конструирование звеньев, компоновка приводов,
- силовой расчет,
- расчет конструкции манипулятора на жесткость.

В основе конструкторских расчетов – данные ТЗ на проектирование манипулятора МР, в том числе:

- характеристики рабочей зоны,
- массогабаритные параметры перемещаемых грузов,
- законы движения ЗУМ,
- (не обязательно) жесткость конструкции манипулятора.

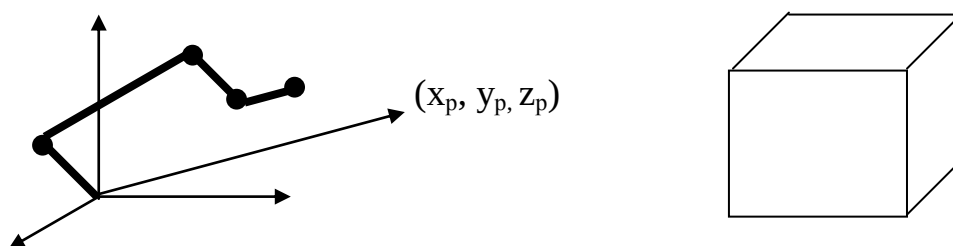
Конструирование манипулятора – самостоятельная задача, требующая особых знаний и подходов. Не всегда удастся провести четкую границу между этапами конструирования манипулятора и проектирования ИСУ, поскольку конструкторские решения находятся в общем случае в зависимости от результатов расчетов на этапе проектирования ИСУ. В свою очередь, в состав исходных данных на проектирование ИСУ входят (массогабаритные) параметры, определяемые в ходе разработки конструкции МР. Поэтому разработка манипулятора – итерационный процесс, включающий в себя отдельные фрагменты обоих этапов (конструирование манипулятора и проектирование ИСУ МР).

В нашем курсе мы будем полагать этот процесс завершенным в том смысле, что известны все необходимые массогабаритные параметры манипулятора МР.

1. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ КОНСТРУИРОВАНИЯ МАНИПУЛЯТОРОВ МР

1.1. Характеристики, которым должен соответствовать МР.

1. Характеристики рабочей зоны. Определяют объем и форму пространства, в которой мог иметь возможность размещаться и быть определенным образом сориентирован ЗУМ МР. При этом д.б. тем или иным образом заданы значения линейных координат ЗУМ в рабочей зоне: x_p, y_p, z_p .



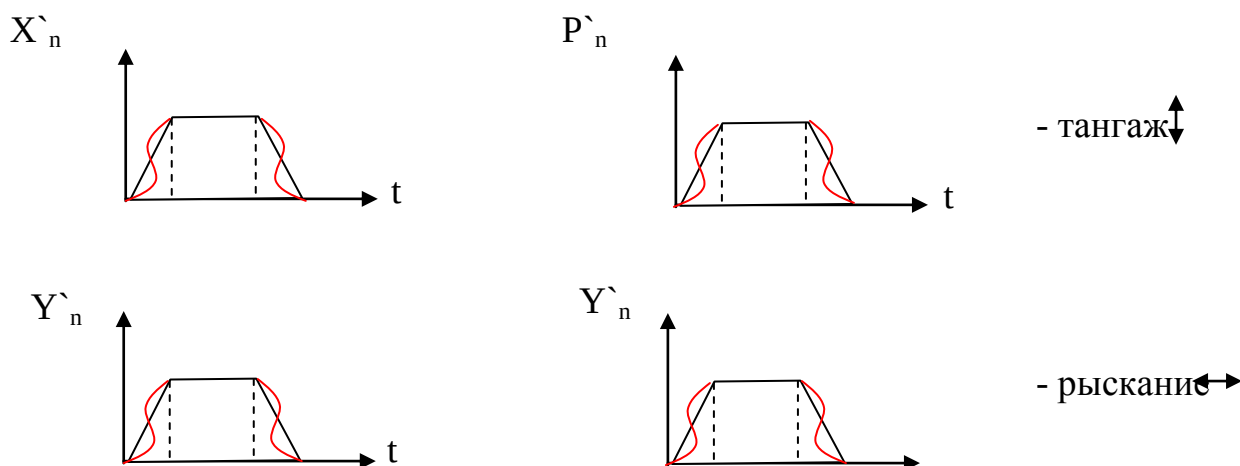
А также значения углов ориентации СК Зв рабочей зоне УМ относительно базовой СК $\{P_p, Y_p, R_p\}$.

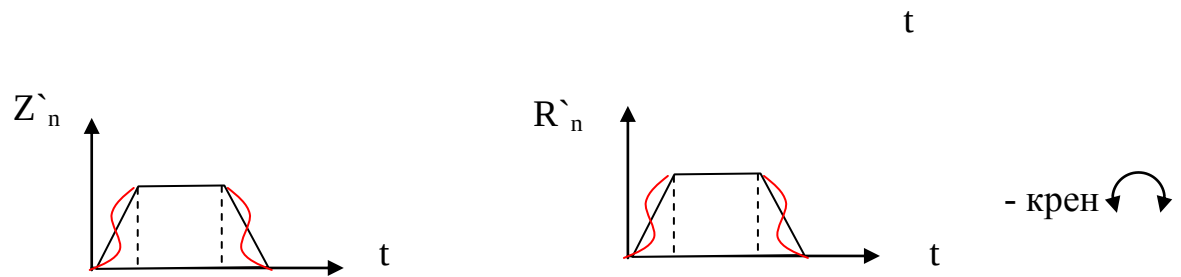
2. Массогабаритные параметры грузов.

$$m_{\text{груза}}(P_{\text{груза}} = m * g)[\text{кЗ}].$$

- значения массы груза, которые должен удерживать или перемещать МР в пределах рабочей зоны.

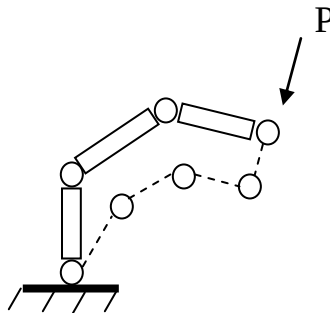
3. Законы движения захватного устройства манипулятора (ЗУМ). Как правило, задаются законы изменения во времени линейных и угловых скоростей ЗУМ в рабочей зоне





Задаются в виде функций времени декартовых линейных и угловых координат МР или их скоростей изменения. Законы движения, как правило, включают участки разгона, движения с заданной скоростью и участки торможения (останова).

4. Жесткость конструкции манипулятора.

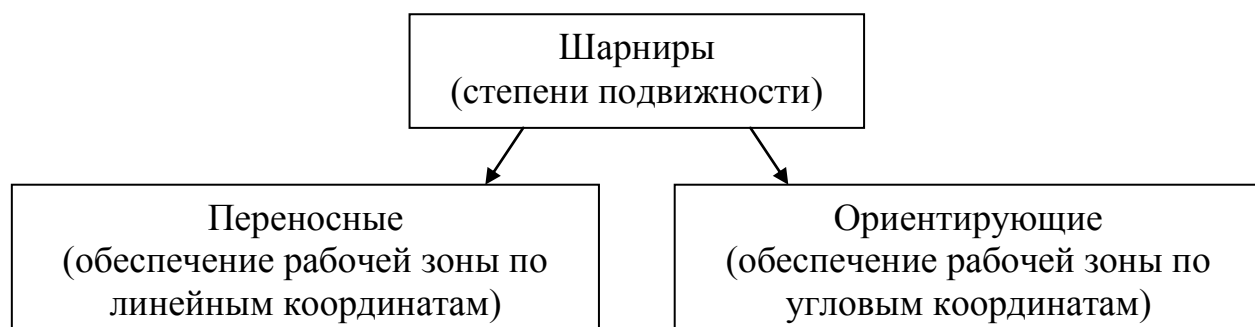


Жесткость – величина отклонения линейных и угловых координат ЗУМ МР в результате упругих деформаций ИМ и механизма передачи движения, возникающих под действием заданных сил и моментов.

1.2. Некоторые вопросы конструирования манипулятора МР.

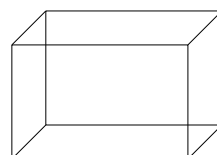
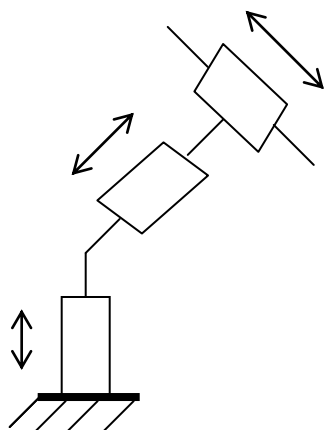
1.2.1. Выбор кинематической схемы, определение количества и типа шарниров, длин и взаимного расположения шарниров.

Решение этой задачи обеспечивает соблюдение требований по рабочей зоне.

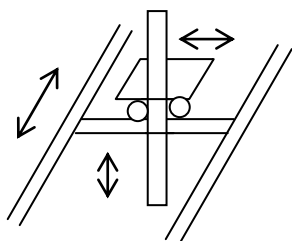


На практике получили распространение следующие типовые компоновки переносных степеней подвижности манипулятора.

а) Прямоугольная.



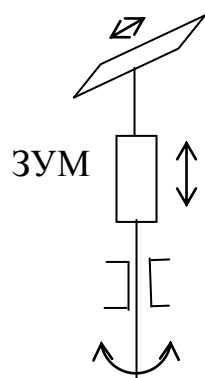
рабочая зона



Пример. Робот Transfer System «Е» (ФРГ)

100 кг., 2,3 м.

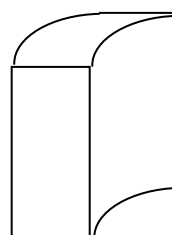
б) Цилиндрическая.



$$\sigma_3 = 0$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = 1$$

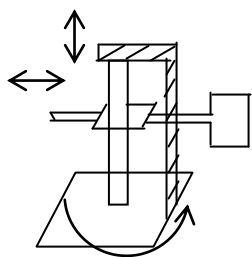


рабочая зона

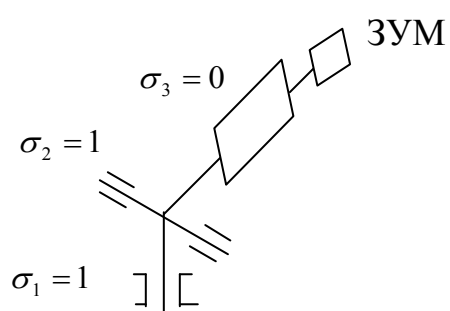
Пример: Универсал-5 (СССР) (n=6, 5 кг, 650 кг, электропривод).

Robotek-1 (ФРГ) ($n=6$, 12 кГ, 450 кГ, электропривод).

VERSATRAN.

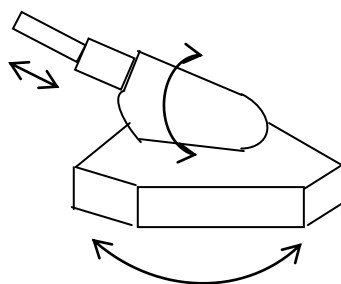


в) Сферическая.

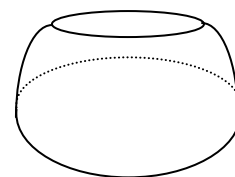


Пример: Unimate (США)

Универсал – 15 (СССР)



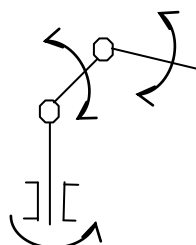
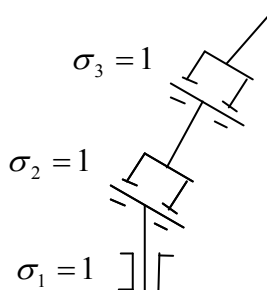
Рабочая зона - сфера



Unimate Mark II	$n=5$,	11 кГ	1600 кГ
-----------------	---------	-------	---------

Универсал-15	$n=6$	15 кГ	2100 кГ
--------------	-------	-------	---------

г) Ангулярная (угловая).



Рабочая зона – часть сферы с дополнительным диском внутри.

Чаще применяются в экстремальной робототехнике.

Роботы с ангулярной компоновкой – антропоморфные.

д) Другие ...

Многозвенные



Примеры:

PUMA (Unimation, Europe) 1.5 кГ, $n=6$, 100 кГ.

PM-01 (СССР),

Tralfa (Норвегия) -14 кГ, $n=6$, 450 кГ.

В манипуляторах для экстремальных сред наибольшее распространение получили компоновки ангулярного типа. При выбранной компоновке задача расчета кинематики сводится к выбору длин звеньев.

Промышленные роботы в мире имеют следующую статистику по типу компоновки переносных степеней:

прямоугольные СК 7%

цилиндрические СК 52%

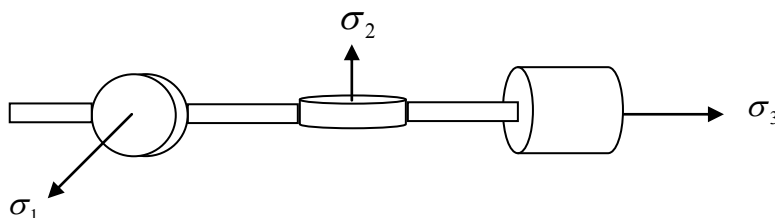
сферические СК 15%

ангулярные СК 13%

(по данным 1991 года).

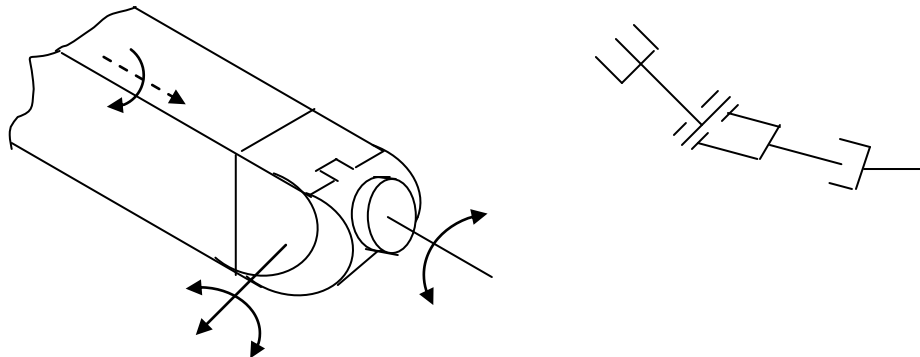
Компоновка ориентирующих степеней подвижности:

а) последовательная

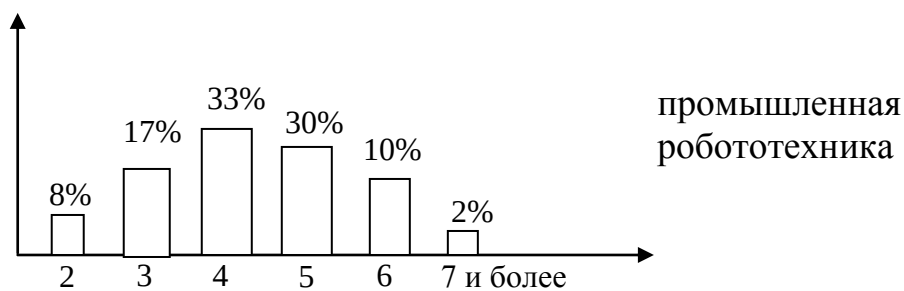


б) оси ориентирующих шарниров пересекаются в одной точке

Робот «PUMA»



Число степеней подвижности и процент реализации



В экстремальной робототехнике чаще используется 6 степеней свободы.

В зависимости от объема рабочей зоны встречаются следующие случаи конструкций промышленных роботов:

- До 0.009 м куб – 4%,
- от 0.01 до 0.09 м куб – 9%,
- от 0.1 до 0.999 м куб – 30%,
- от 1.0 до 9.99 м куб – 45 %,
- Свыше 10 м куб – 12 %.

После выбора кинематической схемы и ее параметров выполняется расчет реальных значений параметров рабочей зоны. Эти расчеты выполняются по формулам 3-го курса и включают определение линейных и угловых координат ЗУМ по задаваемым значениям координат шарниров и конструктивным значениям параметров звеньев.

Отметим, что типовые компоновки имеют ограничения по ориентации. В экстремальной робототехнике чаще применяют ангулярные схемы компоновок. Такие схемы обеспечивают большие диапазоны изменения углов ориентации ЗУМ (в том числе – за счет транспортных степеней подвижности).

Результат расчетов на этом этапе – значения:

n – число звеньев ИМ,

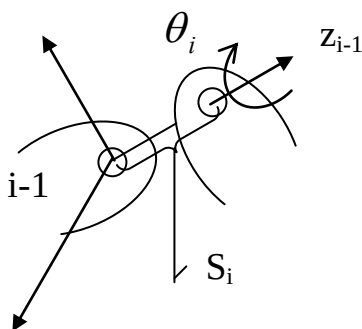
σ_i – тип кинематических пар,

l_i – длины звеньев;

$\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – углы начальной установки осей шарниров.

Отметим, что расчет параметров l_i и $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ производится в системах координат, связанных со звеньями ИМ МР.

Выбор СК звеньев ИМ МР осуществляется в соответствии с правилами, введенными при изучении курса «введение в робототехнику»:



При этом

$$q_i = \sigma_i * \theta_i + (1 - \sigma_i) * S_i;$$

$$\sigma_i = 1, \text{ если } i = [\text{ВП}];$$

$$\sigma_i = 0, \text{ если } i = [\text{ПП}].$$

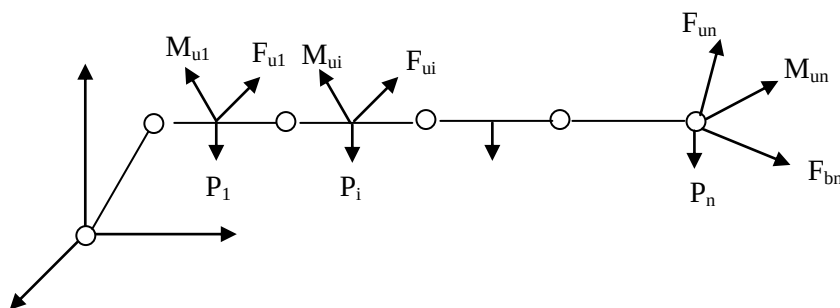
Начало СК_{*i-1*} – в центре шарнира *i*.

1.2.2.Силовой расчет манипулятора.

Заключается в вычислении сил и моментов, действующих на исполнительный механизм МР. Знание этих величин необходимо для расчета манипулятора на жесткость.

Внешние силы и моменты - требуются для расчета

Силы и моменты инерции



P_n = вес самого звена (n) + вес груза

- 1) Сила тяжести.
- 2) Сила взаимодействия ЗУМ с внешними объектами.
- 3) Моменты взаимодействия.

F_{ui} – сила инерции, действующая на i-ое звено;

M_{ui} – момент инерции, действующий на i-ое звено.

$$F_{ui} = -m_i * \ddot{x}_i$$

m_i - масса звена;

$\ddot{x}_i$ - ускорение звена.

M_{ui} - момент инерции i-ого звена

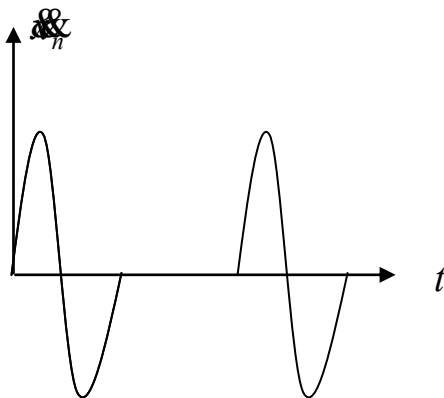
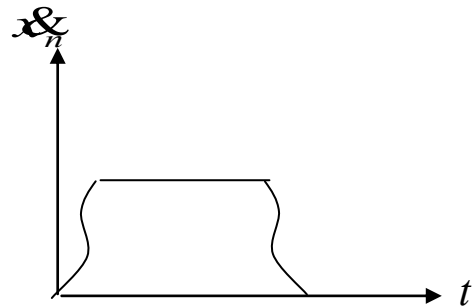
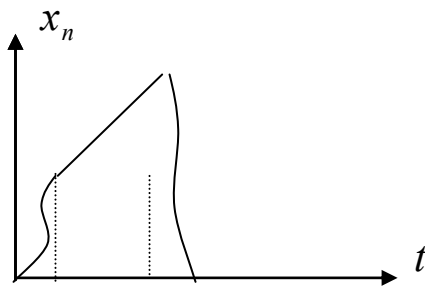
$$M_{ui} = -I_i * \ddot{\alpha}_i - \lambda(\omega_i) * I_i * \omega_i$$

I_i - тензор инерции i-ого звена;

$\ddot{\alpha}_i$ - угловое ускорение i-ого звена;

ω_i - угловая скорость i-ого звена.

$\ddot{x}_i, \ddot{\alpha}_i, \omega_i$ - получаем из закона движения ЗУМ.



$$(\dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n) \rightarrow V_n(t)$$

$$(\dot{P}_n, \dot{Y}_n, \dot{R}_n) \rightarrow \omega_n(t)$$

$$\dot{\Phi}^*(t) = \Delta^{-1} * \left(\frac{V_n(t)}{\omega_n(t)} \right)$$

Δ - якобиан ИМ МР

Заданные значения скоростей обобщенных координат $\dot{\Phi}^*(t)$ могут быть вычислены также путем дифференцирования по времени плановых траекторий, формируемых на основе плановых значений $x_n(t), y_n(t), z_n(t), P_n(t), Y_n(t), R_n(t)$, формируемых системами планирования траекторий в декартовом пространстве и решение обратных задач кинематики ИМ для каждой из плановых точек.

Вычисленные тем или иным способом плановые значения производных обобщенных координат дают возможность вычислить плановые значения угловых и линейных скоростей отдельных звеньев, а также их производных.

$$\omega_i^* = \sum_{j=1}^i C_j * \phi_j;$$

$$V_i^* = \sum_{j=1}^i D_{ij} * \phi_j;$$

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^i \alpha_j * \phi_j + \sum_{j=1}^i C_j * \phi_j;$$

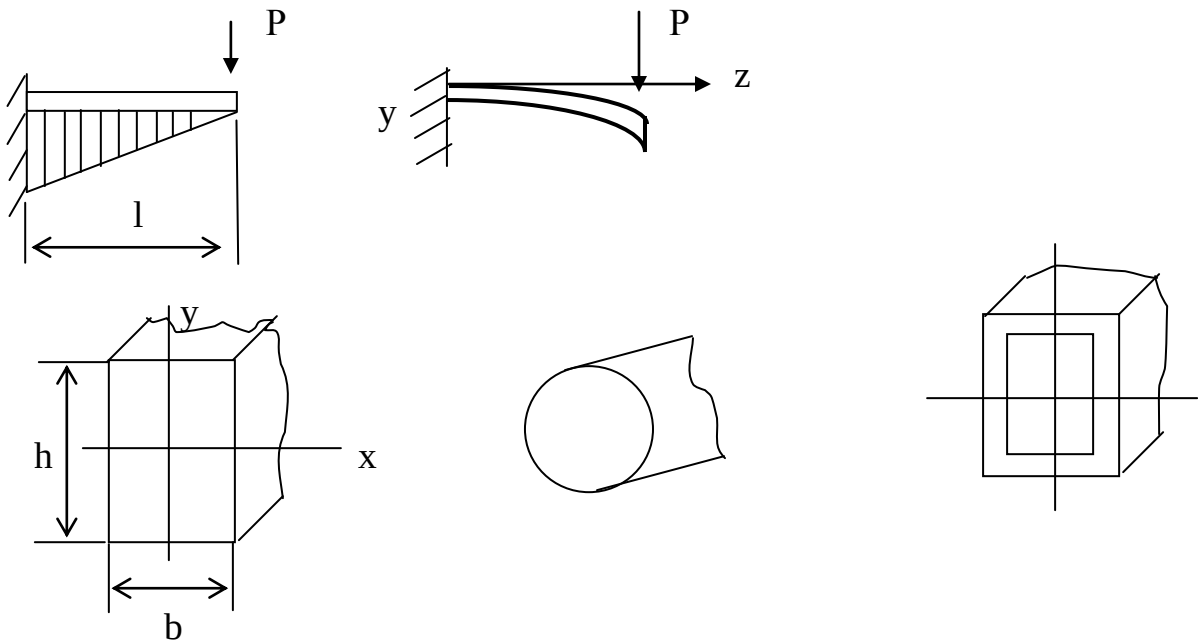
$$I_i = \sum_{j=1}^i D_{ij} * \phi_j + \sum_{j=1}^i D_{ij} * \phi_j.$$

Плановые значения линейных и угловых ускорений можно получить путем численного дифференцирования по времени плановых значений угловых и линейных координат звеньев.

Зная ϕ_j , α_j находим I_i, α_i для i -того звена.

$F_{ui} = -m_i * I_i$ если известна масса, но мы ее только рассчитываем. Поэтому задаем к-л сечение звена, рассчитываем силы и дальше смотрим, что получается.

1.2.3. Расчет на жесткость. Манипулятор не должен деформироваться под действием действующих на него сил и моментов более заданных в ТЗ значений. Для обеспечения этих условий подбирается материал звеньев и профили их сечения. Иллюстрация расчетов следующая:



$$y(z) = \frac{P}{E * I_x} \left(l * \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{6} \right);$$

$$y_{\max} = \frac{P * l^3}{3 * E * I}.$$

E - модуль упругости 1-го рода;

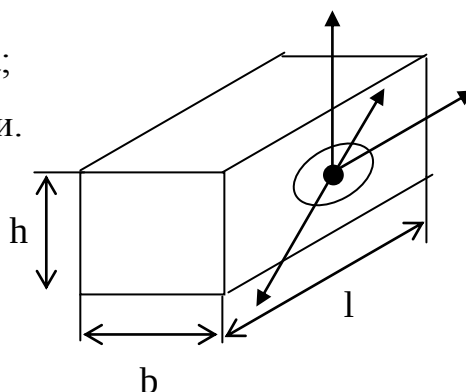
I_x - момент инерции сечения (поперечного).

$$I_x = \frac{b * h^3}{12}.$$

Выбираем материал (модуль упругости E), сечение (исходя из I_x , находим b , h), и определяем таким образом, массу звена и рассчитываем значение его тензора инерции.

Сечение – из силового расчета;

Длина – из расчета кинематики.

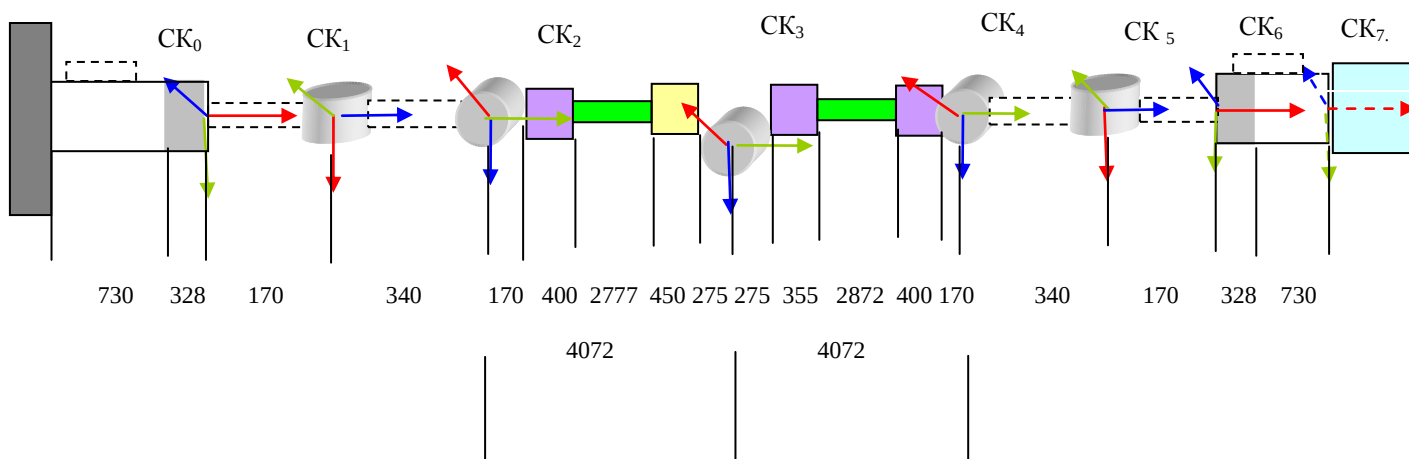


В общем случае, конструкция звеньев более сложная и включает помимо, собственно, звена, множество других элементов (фитинги, силовые модули приводов, электронные блоки, компьютеры, навесное оборудование – телекамеры, устройства систем наведения и т.д.).

Поэтому задача расчета массо-габаритных параметров звеньев решается на основе «суммирования» массо-габаритных параметров отдельных их элементов. Разделение общей конструкции звеньев на отдельные элементы чаще всего происходит естественным образом (по функциональному признаку – привод, стрела и т.д.) и осуществляется на основе анализа конструкции МР.

Так например, конструкция манипулятора КМР ERA может быть представлена состоящей из следующих блоков.

Анализ конструкции позволяет представить манипулятор ERA в виде следующей схемы



Всего длина: 11280

Чертеж манипулятора КМР ERA (размеры в мм).

Обозначено серым цветом – приводы степеней подвижности.

Приводы – цилиндры диаметром 340 мм и высотой 300 мм (кроме приводов 1-го и 7-го шарниров), масса одного привода – 35.3 кг. Высота 1-го и 7-го приводов – 328 мм.

Малиновый цвет – электронные блоки – прямоугольные параллелепипеды. Сторона основания (квадрат) – 300 мм, высота указана на рис.1. Масса одного электронного блока – 35.3 кг.

Желтый цвет – бортовой компьютер – прямоугольный параллелепипед. Сторона основания – 250 мм. Высота – 450 мм. Масса – 24.7 кг.

Голубой цвет – объект манипулирования (полезный груз - ПГ). Куб. Сторона основания – 1 м. Масса – в таблице вариантов.

Зеленый цвет – стрелы 3-го и 4-го звеньев. Длины указаны на чертеже рис. 1.

Трубы диаметром 240 мм. Масса одной стрелы – 24 кг. В расчетах принять стрелы в виде однородных стержней.

4-й шарнир (СК₃) смещен по оси X (вниз) на 156 мм.

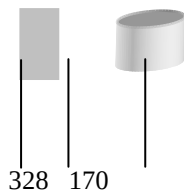
Все остальные элементы расположены симметрично вдоль продольной оси конструкции.

Масса одного захватного устройства (слева и справа) – 74,6 кг. Цилиндр. Высота указана на рис.1. Диаметр – 350 мм.

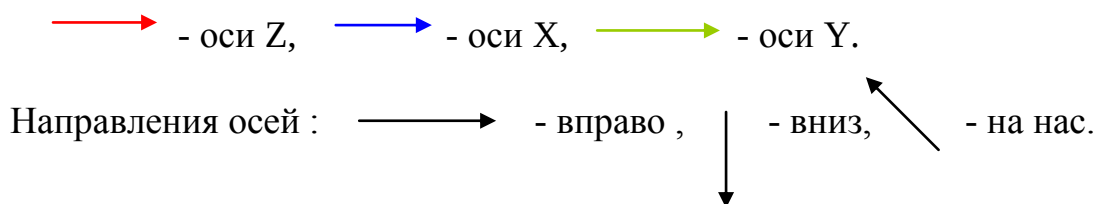
Можно видеть, что отдельные звенья включают разное число элементов. Так, звенья 1 и 2 тождественны приводам. Звено 3 включает несколько элементов: приводы, эл. блок, стрелу, блок бортового компьютера. Звено 7 – ЗУМ, привод, ПГ.

При расчетах инерционных характеристик звеньев массы приводов этого МР относят поровну между двумя соседними звеньями. Центры масс каждой половины считать совпадающими с центрами масс соответствующих приводов.

Например, звено №1 состоит из (двух) половин приводов №1 и №2. Масса каждой половины равна половине массы соответствующего привода. Геометрические размеры половин приводов и их центры масс принимаются равными размерам и координатам центров целых приводов.



Все расчеты производятся с привязкой к системам координат звеньев (почему, например, не в инерциальной СК?). Системы координат нанесены на чертеж и выбраны соответственно правилам, введенным на 3-м курсе.



Как было сказано ранее, при расчете массогабаритных параметров звеньев решаются 2 задачи – расчет массогабаритных параметров отдельных элементов конструкции звеньев, как отдельных тел и их «суммирование».

Отметим, что «массогабариты» отдельных элементов (j) звеньев (i) – это

- массы m_{ij}

- координаты центров масс r_{ij}

- тензоры инерции элементов I_{ij} , заданные в СК, связанных с центрами масс элементов звеньев.

Напомним, что есть что.

Масса – мера инерции тела.

Центр масс – точка, в которой можно мысленно сосредоточить ... (?)

Вектор координат центра масс звена в некоторой СК может быть представлен в виде

$$x_{цм} = \frac{\sum_v m_v * x_v}{\sum_v m_v} \quad y_{цм} = \frac{\sum_v m_v * y_v}{\sum_v m_v} \quad z_{цм} = \frac{\sum_v m_v * z_v}{\sum_v m_v}$$

Тензор инерции тела – это матрица 3х3 следующего вида

$$I_i = \begin{pmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}.$$

$$I_{xx} = \sum_v m_v * (y_v^2 + z_v^2);$$

$$I_{yy} = \sum_v m_v * (x_v^2 + z_v^2);$$

$$I_{zz} = \sum_v m_v * (x_v^2 + y_v^2);$$

$$I_{xy} = \sum_v m_v * x_v * y_v;$$

$$I_{xz} = \sum_v m_v * x_v * z_v;$$

$$I_{zy} = \sum_v m_v * z_v * y_v.$$

Суммирование производится по всем точкам v тела массой m_v . Векторы координат центров масс и тензоры инерции задаются в СК, связанных с телом. Обычно, начала этих СК помещают в центр масс тела. Оси таких СК часто (не всегда!) являются главными центральными осями инерции этого тела.

Поэтому в этой СК (СК тела !)

$$r_{ij} = 0,$$

И

$$I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0.$$

Часто в результате конструирования получаем сборочный чертеж манипулятора или отдельных его звеньев. Для расчета массогабаритных параметров требуется разделить на отдельные элементы, вычислить массогабаритные характеристики отдельных элементов звеньев и произвести на их основе расчет суммарных массогабаритных параметров звеньев. Т.е. как бы превратить чертежи в массогабаритные характеристики манипулятора.

В нашем курсе мы будем предполагать решенными задачи анализа конструкции (разбиение на элементы и расчет их массогабаритов).

Поэтому задача анализа конструкции сводится к расчету «суммарных» массогабаритных параметров звеньев по заданным параметрам их элементов.

Получим формулы такой сборки.

Очевидно, масса звена равна массе всех элементов, входящих в его состав, т.е.

$$m_i = \sum m_{ij} \quad (i)$$

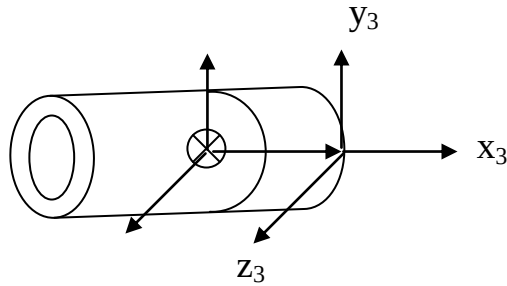
Компоненты вектора центра масс рассчитываются так:

$$x_i = \frac{\sum_j m_{ij} * x_{ij}}{\sum_j m_{ij}};$$

$$y_i = \frac{\sum_j m_{ij} * y_{ij}}{\sum_j m_{ij}};$$

$$z_i = \frac{\sum_j m_{ij} * z_{ij}}{\sum_j m_{ij}}.$$

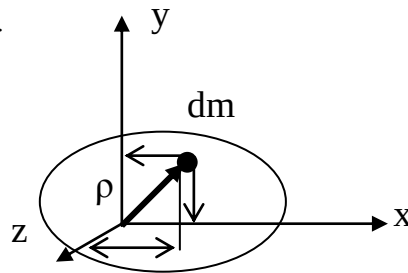
Тензоры инерции звеньев рассчитываются по значениям тензоров инерции отдельных элементов с учетом формул приведения к осям смещенных и повернутых СК.



Очевидно, в общем случае ни начала, ни ориентация СК, в которых заданы инерционные характеристики элементов отдельных звеньев, не совпадают с СК звеньев (рис. выше, пример 3-го звена ERA). Поэтому возникает задача приведения инерционных характеристик отдельных звеньев к СК звена, в общем виде – смещенных и повернутых относительно СК отдельных элементов.

Рассмотрим решение этой задачи.

Как известно, момент инерции звена относительно какой-либо оси есть интегральная сумма произведений масс звеньев на квадраты расстояния этих масс до соответствующей оси.



$$I_x = \int_M (y^2 + z^2) dm;$$

$$I_y = \int_M (x^2 + z^2) dm;$$

$$I_z = \int_M (x^2 + y^2) dm.$$

$$M = \int_M dm$$

M – масса всего тела;

dm – элементарная масса.

Центробежные моменты инерции – это значения

$$I_{xy} = \int_M xy dm;$$

$$I_{xz} = \int_M xz dm;$$

$$I_{yz} = \int_M yz dm.$$

ρ – вектор координат точки массой dm

$$I = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_z \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} \\ I_{xz} &= I_{zx} \\ I_{yz} &= I_{zy} \end{aligned}$$

Выражение для расчета тензоров инерции произвольного твердого тела можно представить с использованием матрицы векторного произведения $\lambda(.)$ следующим образом

$$I = \int_M \lambda(\rho) * \lambda^T(\rho) dm,$$

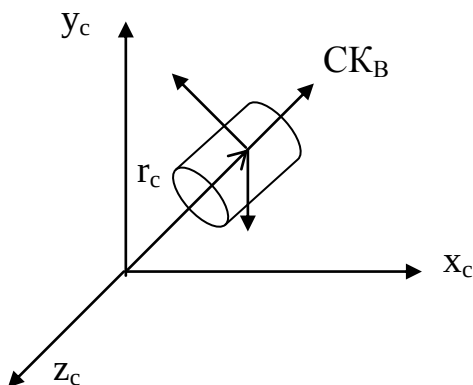
где ρ – вектор координат точки массой dm ;

$\lambda(\rho)$ – матрица векторного произведения.

$$\rho = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \quad \lambda(\rho) = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix};$$

$$I = \int_M \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix} dm = \int_M \begin{pmatrix} z^2 + y^2 & -x * y & -x * z \\ -y * x & z^2 + x^2 & -y * z \\ -z * x & -z * y & x^2 + y^2 \end{pmatrix} dm.$$

Формула расчета тензоров инерции тел относительно смещенных и повернутых СК.



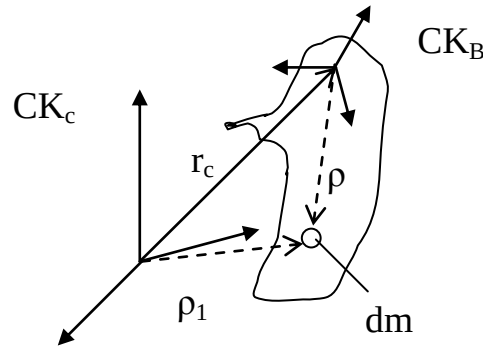
Пусть CK_b , связанная с телом, повернута и смещена относительно CK^c ,

r_i – вектор, связывающий начала координат СК^c и СК_B;

$\tau_{CB} = \tau$ – матрица преобразования поворота СК_B и СК^c.

Тогда

$$I^c = \int_M \lambda(\tau * \rho + r_c) * \lambda^T(\tau * \rho + r_c) dm.$$



$$\rho_1 = \tau * \rho + r_c;$$

$$\begin{aligned} I_c &= \int_M \lambda(\tau * \rho + r_c) * \lambda^T(\tau * \rho + r_c) dm = \int_M \lambda(\tau * \rho) * \lambda^T(\tau * \rho) dm + \int_M \lambda(r_c) * \lambda^T(\tau * \rho) dm = \\ &= \int_M \lambda(\tau * \rho) * \lambda^T(r_c) dm + \int_M \lambda(r_c) * \lambda^T(r_c) dm = \int_M \tau * \lambda(\rho) * \tau^T * \tau * \lambda^T(\rho) * \tau^T dm + \\ &\quad \lambda(r_c) \int_M \tau * \lambda^T(\rho) * \tau dm + \int_M \tau * \lambda(\rho) * \tau^T * \lambda(r_c) dm + \int_M \lambda(r_c) * \lambda^T(r_c) dm = \tau * \left(\int_M \lambda(\rho) * \lambda^T(\rho) dm \right) * \\ &\quad * \tau^T + \lambda(r_c) * \tau * \left(\int_M \lambda^T(\rho) dm \right) * \tau^T + \tau * \left(\int_M \lambda(\rho) dm \right) * \tau^T * \lambda(r_c) + \int_M \lambda(r_c) * \lambda^T(r_c) dm = \end{aligned}$$

$$I_c = \tau * I_B * \tau^T + M_B * \lambda(r_c) * \lambda^T(r_c). \quad (*)$$

Обычно стараются сделать так, чтобы $I_B = \text{diag}(I_{xB}, I_{yB}, I_{zB})$. Если это так, то формула (*) м.б. представлена в развернутом виде

$$\tau = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix};$$

$$I_c = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_{xB} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yB} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zB} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{pmatrix} + M_B * \begin{pmatrix} 0 & -z_c & y_c \\ z_c & 0 & -x_c \\ -y_c & x_c & 0 \end{pmatrix} *$$

$$* \begin{pmatrix} 0 & z_c & -y_c \\ -z_c & 0 & x_c \\ y_c & x_c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_{xB} * t_{11} & I_{xB} * t_{21} & I_{xB} * t_{31} \\ I_{yB} * t_{12} & I_{yB} * t_{22} & I_{yB} * t_{32} \\ I_{zB} * t_{13} & I_{zB} * t_{23} & I_{zB} * t_{33} \end{pmatrix} + M_B *$$

$$* \begin{pmatrix} z_c^2 + y_c^2 & -x_c * y_c & -x_c * z_c \\ -y_c * x_c & z_c^2 + x_c^2 & -y_c * z_c \\ -z_c * x_c & -z_c * y_c & x_c^2 + y_c^2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} I_{xB} * t_{11}^2 + I_{yB} * t_{12}^2 + I_{zB} * t_{13}^2 & I_{xB} * t_{11} * t_{21} + I_{yB} * t_{12} * t_{22} + I_{zB} * t_{13} * t_{33} & I_{xB} * t_{11} * t_{31} + I_{yB} * t_{12} * t_{32} + I_{zB} * t_{13} * t_{33} \\ * & I_{xB} * t_{21}^2 + I_{yB} * t_{22}^2 + I_{zB} * t_{23}^2 & I_{xB} * t_{21} * t_{31} + I_{yB} * t_{22} * t_{32} + I_{zB} * t_{23} * t_{33} \\ * & * & I_{xB} * t_{31}^2 + I_{yB} * t_{32}^2 + I_{zB} * t_{33}^2 \end{pmatrix}$$

;

$$I_{xc} = I_{xB} * t_{11}^2 + I_{yB} * t_{12}^2 + I_{zB} * t_{13}^2 + M_B * (z_c^2 + y_c^2);$$

$$I_{yc} = I_{xB} * t_{21}^2 + I_{yB} * t_{22}^2 + I_{zB} * t_{23}^2 + M_B * (z_c^2 + x_c^2);$$

$$I_{zc} = I_{xB} * t_{31}^2 + I_{yB} * t_{32}^2 + I_{zB} * t_{33}^2 + M_B * (x_c^2 + y_c^2);$$

$$-I_{xy} = I_{xB} * t_{11} * t_{21} + I_{yB} * t_{12} * t_{22} + I_{zB} * t_{13} * t_{33} - M_B * x_c * y_c;$$

$$-I_{xz} = I_{xB} * t_{11} * t_{31} + I_{yB} * t_{12} * t_{32} + I_{zB} * t_{13} * t_{33} - M_B * x_c * z_c;$$

$$-I_{yz} = I_{xB} * t_{21} * t_{31} + I_{yB} * t_{22} * t_{32} + I_{zB} * t_{23} * t_{33} - M_B * y_c * z_c.$$

Оси $x_c \perp y_c$, поэтому $t_{11} * t_{21} + t_{12} * t_{22} + t_{13} * t_{23} = 0$

$$t_{13} * t_{23} = -(t_{11} * t_{21} + t_{12} * t_{22});$$

$$-I_{xy} = I_{xB} * t_{11} * t_{21} + I_{yB} * t_{12} * t_{22} - (t_{11} * t_{21} + t_{12} * t_{22}) * I_{zB} - M_B * x_c * y_c =$$

$$= (I_{xB} - I_{zB}) * t_{11} * t_{21} + (I_{yB} - I_{zB}) * t_{12} * t_{22} - M_B * x_c * y_c;$$

$$-I_{xz} = (I_{xB} - I_{zB}) * t_{11} * t_{31} + (I_{yB} - I_{zB}) * t_{12} * t_{32} - M_B * x_c * z_c;$$

$$-I_{yz} = (I_{xB} - I_{zB}) * t_{21} * t_{31} + (I_{yB} - I_{zB}) * t_{22} * t_{32} - M_B * y_c * z_c.$$

Если $I_{xB} = I_{yB} = I_{zB}$, то исчезнут слагаемые с элементами матрицы τ .

ПРИМЕР 1. Расчет массогабаритных параметров 3-го звена КМР ERA.

СЛАЙДЫ О КОНСТРУКЦИИ ERA.

1. Анализ конструкции звена, формирование расчетной схемы.

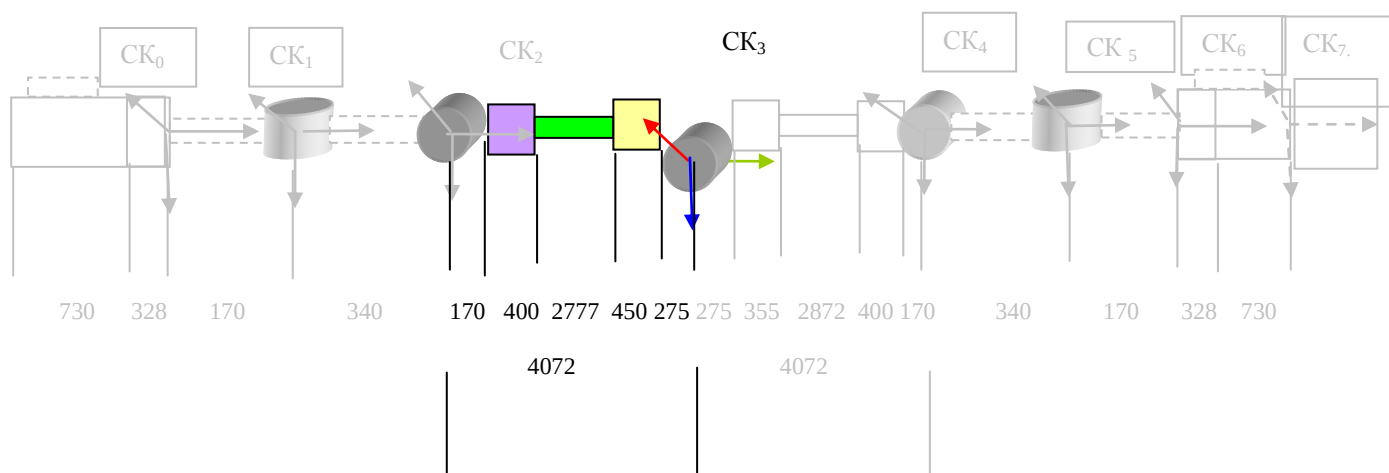
Будем считать этот этап выполненным. Результат – приведен на рисунке.

2. Определение геометрических характеристик звена

2.1. Выбор СК – как рекомендовано на 3-м курсе. В данном случае – как показано на рис.

→ - оси Z, → - оси X, → - оси Y.

Направления осей : → - вправо, ↓ - вниз, ↘ - на нас.



2.2. Длина звена

$$l_3 = (0.156 \ 4.072 \ 0)$$

2.3. Углы начальной установки СК шарнира 3 относительно СК шарнира 2:
 $(0, 0, 0)$.

3. Расчет массогабаритных характеристик отдельных элементов конструкции.

Приводы – цилиндры диаметром 340 мм и высотой 300 мм (кроме приводов 1 –го и 7-го шарниров), масса одного привода – 35.3 кг. Высота 1-го и 7-го приводов – 328 мм.

Малиновый цвет – электронные блоки – прямоугольные параллелепипеды. Сторона основания (квадрат) – 300 мм, высота указана на рис.1. Масса одного электронного блока – 35.3 кг.

Желтый цвет – бортовой компьютер – прямоугольный параллелепипед. Сторона основания – 250 мм. Высота – 450 мм. Масса – 24.7 кг.

Голубой цвет – объект манипулирования (полезный груз - ПГ). Куб. Сторона основания – 1 м. Масса – в таблице вариантов.

Зеленый цвет – стрелы 3-го и 4-го звеньев. Длины указаны на чертеже рис. 1.

Трубы диаметром 240 мм. Масса одной стрелы – 24 кг. В расчетах принять стрелы в виде однородных стержней.

4-й шарнир (СК₃) смещен по оси X (вниз) на 156 мм.

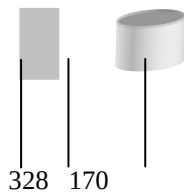
Все остальные элементы расположены симметрично вдоль продольной оси конструкции.

Масса одного захватного устройства (слева и справа) – 74,6 кг. Цилиндр. Высота указана на рис.1. Диаметр – 350 мм.

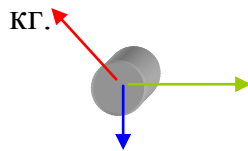
Можно видеть, что отдельные звенья включают разное число элементов. Так, звенья 1 и 2 тождественны приводам. Звено 3 включает несколько элементов: приводы, эл. блок, стрелу, блок бортового компьютера. Звено 7 – ЗУМ, привод, ПГ.

При расчетах инерционных характеристик звеньев массы приводов этого МР относят поровну между двумя соседними звеньями. Центры масс каждой половины считать совпадающими с центрами масс соответствующих приводов.

Например, звено №1 состоит из (двух) половин приводов №1 и №2. Масса каждой половины равна половине массы соответствующего привода. Геометрические размеры половин приводов и их центры масс принимаются равными размерам и координатам центров целых приводов.



Привод 2-го шарнира – цилиндр, диаметр 340 мм, высота 300 мм, масса 35.3



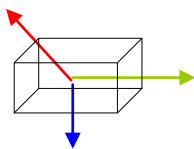
Моменты инерции относительно осей, связанных с цилиндром

$$\text{Ось } Z = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} * 35.3 / 2 * 0.17^2 = 0.255 \text{ кгм}^2$$

$$\text{Оси } X \text{ и } Y = \frac{1}{12} * m * H^2 + \frac{1}{4} * m R^2 = \frac{1}{12} * 35.3 / 2 * 0.3^2 + \frac{1}{4} * 35.3 / 2 * 0.17^2 = 0.2599 \text{ кгм}^2$$

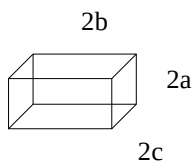
Центр масс – в начале СК цилиндра.

Электронный блок - прямоугольный параллелепипед. Сторона основания (квадрат) – 300 мм, высота 400 мм. Масса одного электронного блока – 35.3 кг.



Моменты инерции в связанной с блоком СК

Ось



$$\text{Ось } X = \frac{1}{3} * (b^2 + c^2) * m$$

$$\text{Ось } Y = \frac{1}{3} * (a^2 + c^2) * m$$

$$\text{Ось } Z = \frac{1}{3} * (a^2 + b^2) * m$$

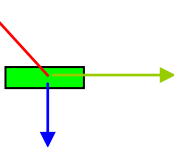
Проверить формулы на «2» !!!

$$A = 150, b = 200, c = 150$$

$$\text{Ось } X = \text{ось } Z = 1/3 \cdot (0.2^2 + 0.15^2) \cdot 35.3 = 0.735 \text{ кгм}^2$$

$$\text{Ось } y = 1/3 \cdot (0.15^2 + 0.15^2) \cdot 35.3 = 0.5295 \text{ кгм}^2$$

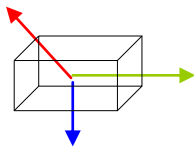
Стрела – труба массой 24 кг, длиной 2.777 м. Для простоты считаем ее однородным стержнем.



$$\text{Ось } Y = 0$$

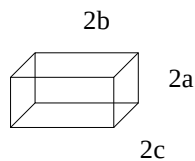
$$\text{Ось } X = \text{Ось } Y = ml^2 / 12 = 24/12 \cdot 2.777^2 = 15.423 \text{ кгм}^2$$

Бортовой компьютер - прямоугольный параллелепипед. Сторона основания (квадрат) – 250 мм, высота 450 мм. Масса одного блока – 24.7 кг.



Моменты инерции в связанной с блоком СК

Ось



$$\text{Ось } X = 1/3 \cdot (b^2 + c^2) \cdot m$$

$$\text{Ось } Y = 1/3 \cdot (a^2 + c^2) \cdot m$$

$$\text{Ось } Z = 1/3 \cdot (a^2 + b^2) \cdot m$$

$$A = 125, b = 225, c = 125$$

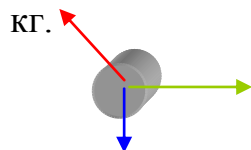
$$\text{Ось } X = \text{ось } Z = 1/3 \cdot (0.125^2 + 0.225^2) \cdot 24.7 = 0.545 \text{ кгм}^2$$

$$\text{Ось } y = 1/3 \cdot (2 \cdot 0.125^2) \cdot 24.7 = 0.257 \text{ кгм}^2$$

...

проверить расчеты.

Привод 3-го шарнира – цилиндр, диаметр 340 мм, высота 300 мм, масса 35.3



Моменты инерции относительно осей, связанных с цилиндром

$$\text{Ось } Z = \frac{1}{2} mR^2 = \frac{1}{2} * 35.3 / 2 * 0.17^2 = 0.255 \text{ кгм}^2$$

$$\text{Оси } X \text{ и } Y = \frac{1}{12} * m * H^2 + \frac{1}{4} * mR^2 = \frac{1}{12} * 35.3 / 2 * 0.3^2 + \frac{1}{4} * 35.3 / 2 * 0.17^2 = 0.2599 \text{ кгм}^2$$

Центр масс – в начале СК цилиндра.

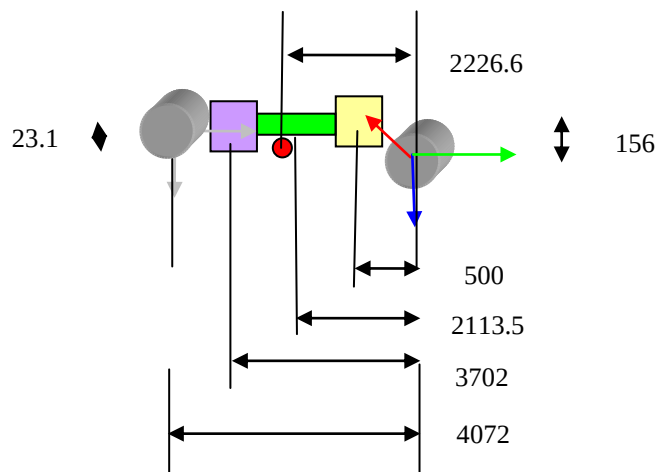
4. Расчет массогабаритных характеристик звена.

4.1. Расчет массы звена

Масса звена = сумме масс всех элементов конструкции звена

$$m_3 = 2 * 35.3 / 2 + 35.3 + 24 + 24.7 =$$

4.2. Координаты центра масс звена 3 в СК звена



$$Y_c = -4072 * (35.3/2) - 3702 * 35.3 - 2113.5 * 24 - 500 * 24.7 // m_3 = -2226.6 \text{ мм.}$$

$$X_c = -156 * (35.3/2) - 156 * 35.3 - 1556 * 24 - 156 * 24.7 // m_3 = -132.9 \text{ мм.}$$

$$Z_c = 0.0 \text{ мм.}$$

4.3. Моменты инерции элементов относительно осей СК звена, совмещенной с его ЦМ.

Привод 2-го шарнира

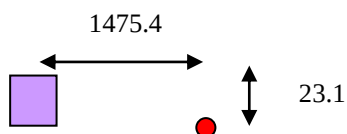


$$I_{xc} = 0.2599 + 35.3/2 * 1.845^2 = 60.34 \text{ кгм}^2$$

$$I_{yc} = 0.2599 + 35.3/2 * 0.023^2 = 0.2692 \text{ кгм}^2$$

$$I_{zc} = 0.255 + 35.3/2 * (1.845^2 + 0.023^2) = 60.355 \text{ кгм}^2$$

Электронный блок

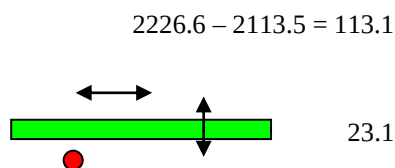


$$I_{xc} = 0.735 + 35.3 * 1.475^2 = 77.534 \text{ кгм}^2$$

$$I_{yc} = 0.5295 + 35.3 * 0.023^2 = 0.548 \text{ кгм}^2$$

$$I_{zc} = 0.735 + 35.3 * (1.475^2 + 0.023^2) = 77.534 \text{ кгм}^2$$

Труба

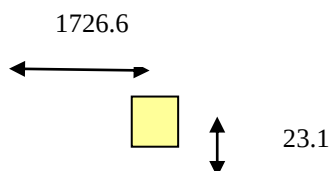


$$I_{yc} = 0 + 24 * 0.023^2 = 0.0127 \text{ кгм}^2$$

$$I_{xc} = 15.423 + 24 * 0.1131^2 = 15.729 \text{ кгм}^2$$

$$I_{zc} = 15.423 + 24 * (0.1131^2 + 0.023^2) = 15.74 \text{ кгм}^2$$

Бортовой компьютер

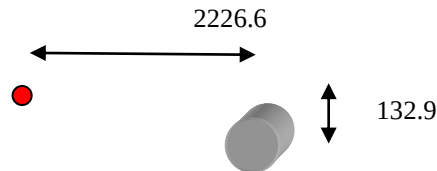


$$I_{xc} = 0.545 + 24.7 * 1.7266^2 = 74.179 \text{ кгм}^2$$

$$I_{yc} = 0.257 + 24.7 * 0.023^2 = 0.27 \text{ кгм}^2$$

$$I_{zc} = 0.545 + 24.7 * (1.7266^2 + 0.023^2) = 74.179 \text{ кгм}^2$$

Привод 3-го звена



$$I_{zc} = 0.667 + 35.3/2 * (2.2266^2 + 0.1329^2) = 88.171 \text{ кгм}^2$$

$$I_{yc} = 0.466 + 35.3/2 * 0.133^2 = 0.778 \text{ кгм}^2$$

$$I_{xc} = 0.466 + 87.504 = 87.97 \text{ кгм}^2$$

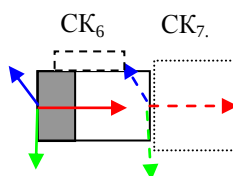
Сумма приведенных к центру масс звена моментов инерции отдельных элементов

$$I_{xc3} = 60.34 + 77.534 + 15.729 + 74.179 + 87.97 = 310.752 \text{ кгм}^2$$

$$I_{yc3} = 0.2692 + 0.547 + 0.0127 + 0.270 + 0.778 = 1.8779 \text{ кгм}^2$$

$$I_{zc3} = 66.335 + 77.534 + 15.74 + 74.179 + 88.171 = 321.959 \text{ кгм}^2$$

ПРИМЕР 2. Расчет массогабаритных параметров 7-го звена



2.1. ПГ отсутствует.

Координаты центра масс следующие

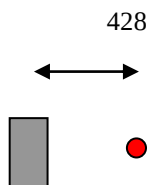
$$Z_c = (-730 - 164) * 35.3/2 - 365 * 74.6 // (35.3/2 + 74.6) = -466.2 \text{ мм}$$

Инерционные параметры привода 7-го звена

$$I_x = I_y = 0.2857 \text{ кгм}^2$$

$$I_z = 0.255 \text{ кгм}^2$$

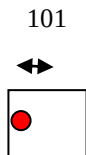
После их приведение к центру масс звена 7 получим



$$I_{zc} = 0.255 \text{ кгм}^2$$

$$I_{yc} = I_{xc} = 0.2857 + 0.428^2 * 35.3/2 = 3.5189 \text{ кгм}^2$$

ЗУМ



Инерционные параметры ЗУМ:

$$I_x = I_y = 1/12 * 74.6 * 0.73^2 + 1/4 * 74.6 * 0.175^2 = 3.884 \text{ кгм}^2$$

$$I_z = 1/2 * 74.6 * 0.175^2 = 1.042 \text{ кгм}^2$$

После приведения к центру масс звена 7 получим

$$I_{zc} = 1.042 \text{ кгм}^2$$

$$I_{yc} = I_{xc} = 3.884 + 0.101^2 * 74.6 = 11.494 \text{ кгм}^2$$

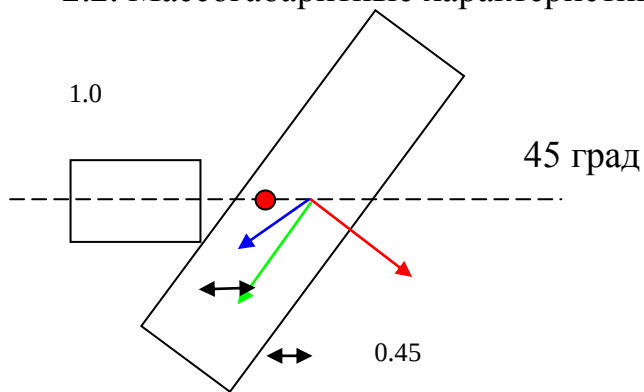
Сумма приведенных к центру масс звена моментов инерции отдельных элементов

$$I_{xc7} = 11.494 + 3.5189 = 15.013 \text{ кгм}^2$$

$$I_{yc7} = 11.494 + 3.5189 = 15.013 \text{ кгм}^2$$

$$I_{zc7} = 1.042 + 0.255 = 1.297 \text{ кгм}^2$$

2.2. Массогабаритные характеристики ПГ



$$2b = 2m$$

$$2a = 2c = 1 \text{ м}$$

$$m=300$$

$$I_x = 1/3 m (b^2 + c^2) = 100 (1 + 0.25) = 125 \text{ кгм}^2$$

$$I_y = 1/3 m (a^2 + c^2) = 100 (0.25 + 0.25) = 50 \text{ кгм}^2$$

$$I_z = 1/3 m (a^2 + b^2) = 100 (0.25 + 1) = 125 \text{ кгм}^2$$

$$T_{cb} = (1 \ 0 \ 0; 0 \ \cos \sin; 0 \ -\sin \ \cos)$$

$$\cos = 0.71$$

$$\sin = -0.71$$

Масса

$$M = 35.3/2 + 74.6 + 300 = 392.25 \text{ кг}$$

$$T_{cb} = (1 \ 0 \ 0; 0 \ 0.71 \ -0.71; 0 \ 0.71 \ 0.71)$$

$$Z_c = -466 \cdot 92.25 + 1450 \cdot 300 // 392.25 = 1000$$

После поворота на - 45 град вокруг оси X:

$$I_{xc} = I_x$$

$$I_{yc} = I_y t_{22}^2 + I_z t_{23}^2 = 175 * 0.71^2 = 87.5 \text{ кгм}^2$$

$$I_{zc} = I_y t_{32}^2 + I_z t_{33}^2 = 175 * 0.71^2 = 87.5 \text{ кгм}^2$$

$$- I_{xy} = 0$$

$$- I_{xz} = 0$$

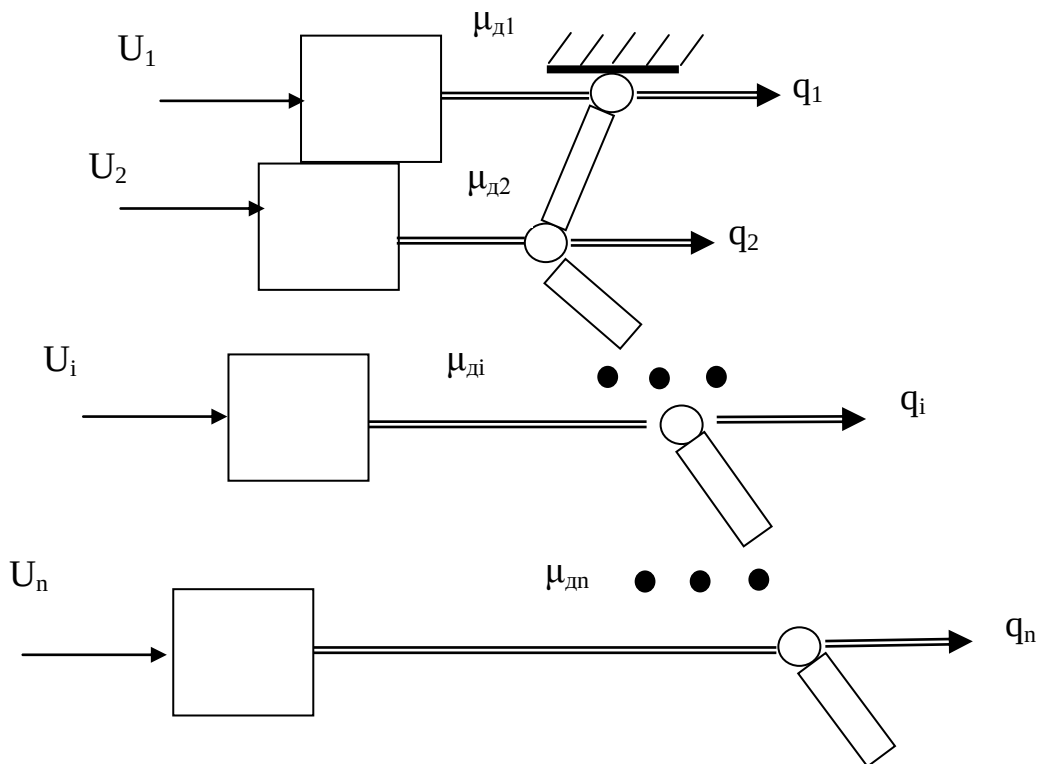
$$- I_{yz} = (I_y - I_z) * t_{22} t_{32} = (50 - 125) * 0.71 * 0.71 = - 37.5 \text{ кгм}^2$$

Видим, что поворот ПГ приводит к появлению центробежных моментов инерции. Это значит, что после приведения массогабаритных параметров ПГ к СК 7-го звена в списке его массогабаритных параметров обязательно появятся центробежные моменты инерции.

~~ВЫДАЧА ДЗ~~

РАСЧЕТ МАТРИЦЫ ИНЕРЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИМ МР

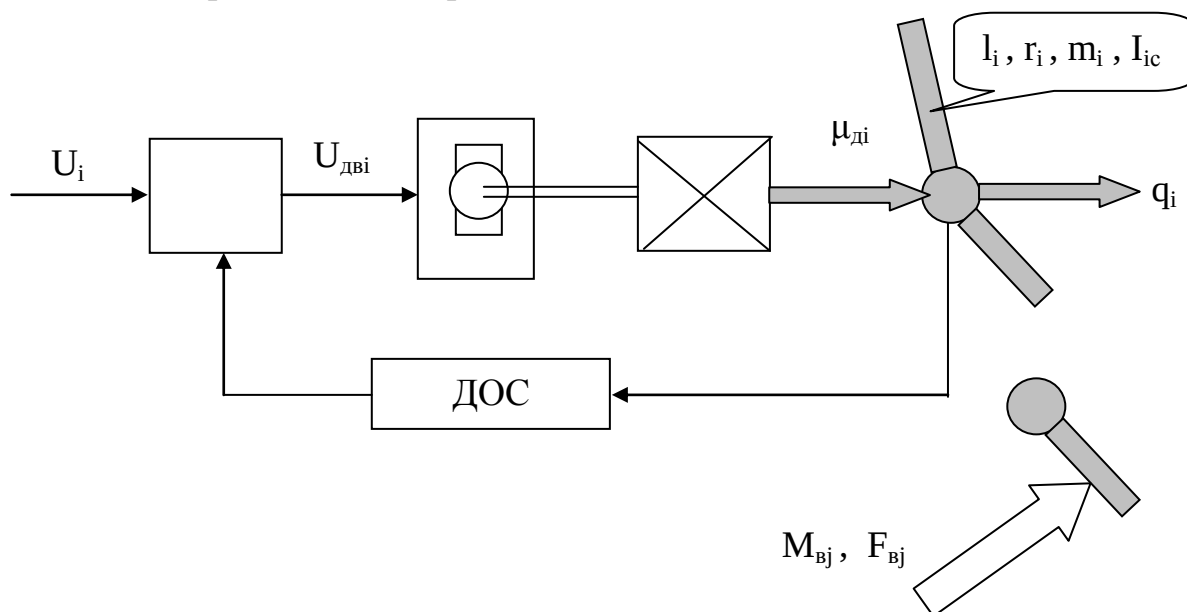
Ранее мы установили, что в составе ИСУ – приводы и ИМ.



В системе «приводы – ИМ» приводы под действием электрических сигналов на их входах U_i формируют силы и моменты μ_{di} . Под действием этих сил и моментов происходит движение ИМ в соответствующих шарнирах. ИМ преобразует движение шарниров в движение рабочего органа МР – ЗУМ.

Двойные линии – механические перемещения, одинарные – электрические сигналы.

Мы будем рассматривать замкнутые (следающие) приводы. В упрощенном виде отдельный привод можно представить так



Преобразование сил и моментов на выходах приводов в механические перемещения происходит в соответствии с уравнениями динамики:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j + b_i = \mu_{di} - \mu_{bi},$$

$$\mu_{bi} = \sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} M_{bj}^{(0)} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} F_{bj}^{(0)}$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Из формулы видно, что силы и моменты отдельных приводов μ_{di} расходуются на преодоление:

- сил и моментов инерции

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j, \text{ прямо пропорциональных ускорениям движения всех шарниров;}$$

в качестве коэффициентов пропорциональности выступают коэффициенты $a_{ij} = a_{ij}(q_s)$ - элементы матрицы инерционных коэффициентов,

- $b_i(q_1, q_k, q_s)$ - сил и моментов от действия центробежных, гироскопических и кориолисовых сил,

- приведенных к шарнирам внешних сил и моментов, приложенных к звеньям:

$$\mu_{bi} = - \left(\sum_{j=i}^n c_i^{(0)T} M_{bj}^{(0)} + \sum_{j=i}^n D_{ji}^{(0)T} F_{bj}^{(0)} \right).$$

Здесь $\mu_{bi} = \mu_{bi}(q_s, M_{bl}, F_{bk})$.

В дальнейшем при описании μ_{di} «подключить» в него силы трения, инерционные силы на двигателе и т.д.

Записанные уравнения описывают динамическое поведение многозвенных ИМ, являющихся объектом управления системы следящих приводов манипулятора МР.

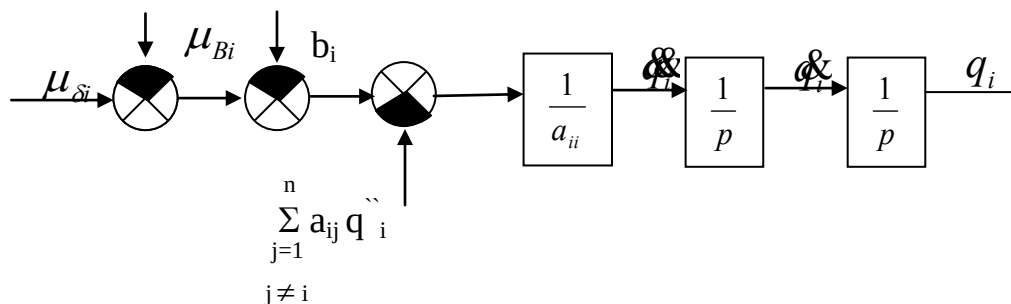
Уравнение

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j + b_i = \mu_{di} - \mu_{bi},$$

представим в следующем виде

$$a_{ii} \ddot{q}_i = \mu_{di} - \mu_{bi} - b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} \ddot{q}_j,$$

Последнее уравнение можно представит в виде следующей структурной схемы

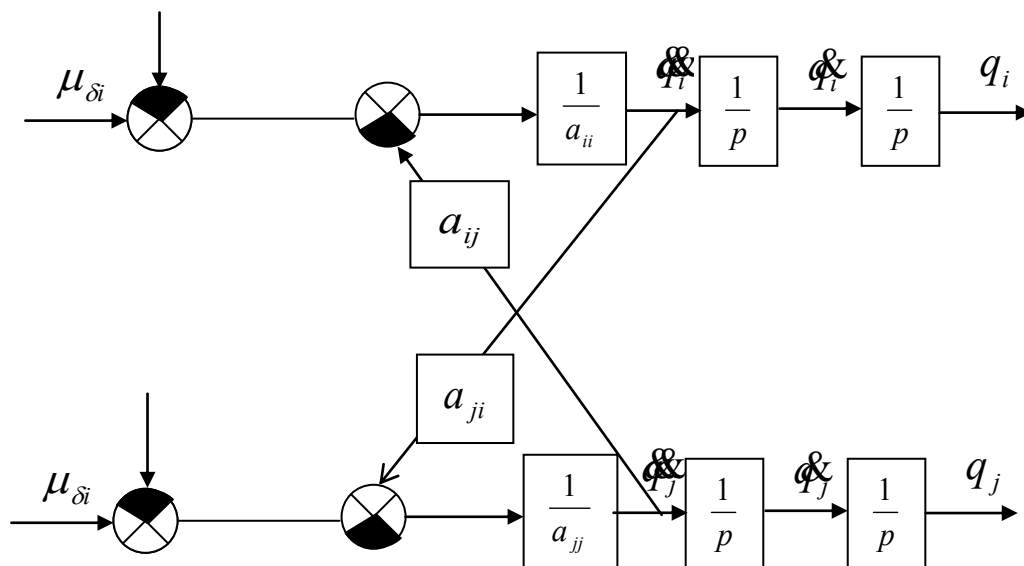


Структура аналогична рассматриваемой ранее. Действительно, a_{ii} – аналог моментов инерции приводов, μ_{bi} – приведенные к выходным валам приводов силы и моменты внешних сил. В отличие от традиционных подходов, в данном случае дополнительно на каждый из приводов действуют силы и моменты b_i , а также силы и моменты динамического взаимовлияния

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} \ddot{q}_j$$

, обусловленные ускорениями, движений иных приводов.

В частном случае ($n=2$) структуру этих компонент можно представить в следующем виде



Видим, что перекрестные связи приводят к изменению свойств нагрузки приводов.

При проектировании МР не первом этапе принято рассматривать работу независимую работу приводов, в предположении, что одновременно может происходить движение только в одном из них (остальные как бы заторможены).

Видно, что одни из компонент нагрузки – элементы матрицы инерционных коэффициентов a_{ij} . Эти компоненты вносят определяющий вклад в динамические свойства МР.

В этой связи их расчету и анализу мы уделим особое внимание.

Из / / следуют формулы для расчета

$$a_{ij} = \sum_{k=\max(i,j)}^n (C_i^{(0)T} * I_k^{(0)} * C_j^{(0)} + D_{ki}^{(0)T} * m_k * D_{kj}^{(0)})$$

Из формулы видно, что a_{ij} – функция массогабаритных параметров не только i -го, но и иных звеньев.

Кроме того, – это функция кинематических и геометрических параметров также, не только данного, но и иных звеньев, т.к.

$$c_i^{(0)} = \tau_{0i} v_i \sigma_i,$$

(орт оси Z_{i-1} , если i – вращательная пара)

$$D_{ki}^{(0)} = \tau_{0i} v_i (1 - \sigma_i) + \lambda(\tau_{0i} v_i \sigma_i) R_{ki}^{(0)} = \tau_{0i} v_i (1 - \sigma_i) + \lambda(c_i^{(0)}) R_{ki}^{(0)},$$

$$R_{ki}^{(0)} = \tau_{0k} r_k + \sum_{l=i}^k \tau_{0l} (v_l (1 - \sigma_l) q_l + l_l).$$

(орт оси Z_{i-1} , если i – поступательная пара или Векторное произведение $c_i^{(0)}$ и $R_{ki}^{(0)}$ если i – вращательная пара). $R_{ki}^{(0)}$ – вектор, проведенных из начала СК $_{i-1}$ к центру масс звена k .

Отметим, что $c_j^{(0)}$ и $D_{ij}^{(0)}$ – функции координат шарниров. Поэтому в общем случае, $a_{ij} = a_{ij}(q_i) = \text{var}$.

При проектировании ИСУ принято рассматривать значения a_{ij} во всем возможном диапазоне значений координат ИМ, включая положения, когда a_{ij} принимает и минимальные и максимальные значения. Поэтому важно уметь оценивать эти величины.

Напомню свойства элементов матрицы инерционных коэффициентов:

Элемент a_{ij} есть:

сумма из $(n - \max(i,j) + 1)$ скалярных произведений вектора $c_i^{(0)}$ и вектора $c_j^{(0)}$, взятых с $I_k^{(0)}$ как с весовыми матрицами, причем k приобретает последовательно целосчисленные значения из диапазона $\max(i,j) \leq k \leq n$

плюс

сумма из $(n - \max(i,j) + 1)$ скалярных произведений векторов $D_{ki}^{(0)}$ и векторов $D_{kj}^{(0)}$, взятых с m_k как с весовыми множителями, причем k приобретает последовательно целосчисленные значения из диапазона $\max(i,j) \leq k \leq n$.

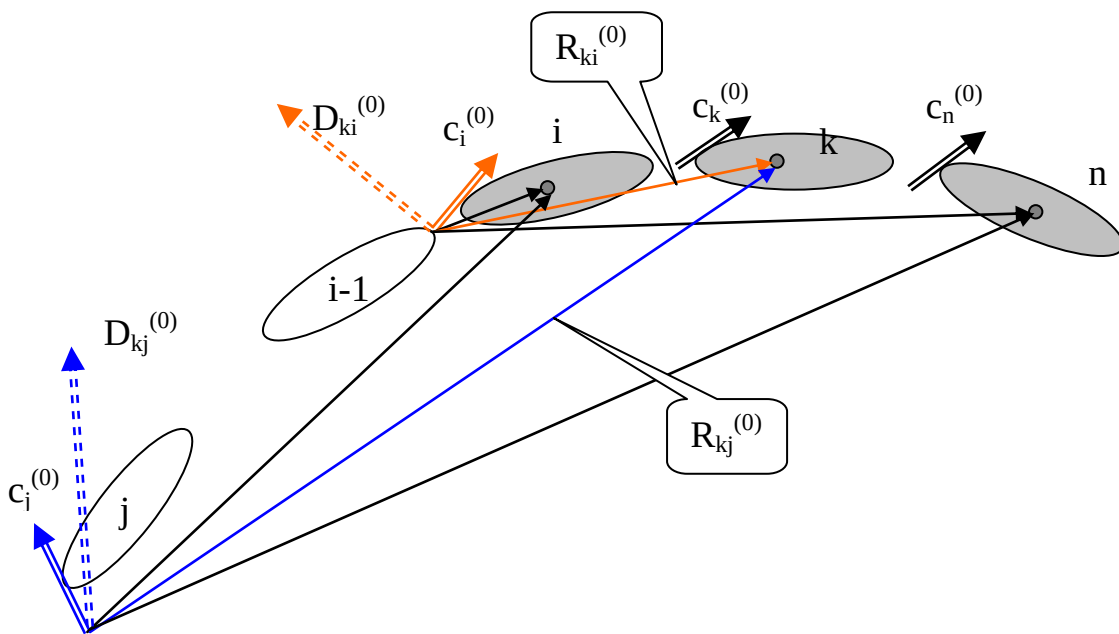
Действительно, по свойству скалярного произведения

$$\mathbf{c}_i^{(0)T} \mathbf{I}_k^{(0)} \mathbf{c}_j^{(0)} = \mathbf{c}_i^{(0)} \cdot (\mathbf{I}_k^{(0)} \mathbf{c}_j^{(0)}),$$

$$\mathbf{D}_{ki}^{(0)T} \mathbf{m}_k \mathbf{D}_{kj}^{(0)} = \mathbf{D}_{ki}^{(0)} \cdot (\mathbf{m}_k \mathbf{D}_{kj}^{(0)}).$$

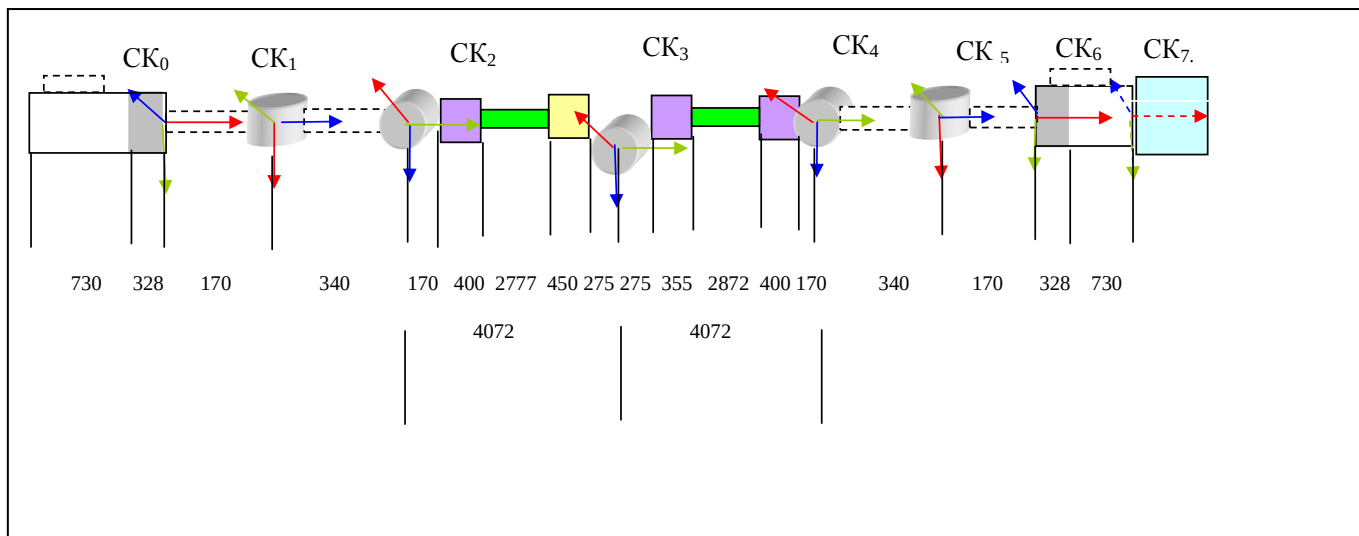
Из выражений видно, что максимальные значения $\mathbf{c}_i^{(0)T} \mathbf{I}_k^{(0)} \mathbf{c}_j^{(0)}$ достигаются в положениях, когда оси i и j параллельны, а максимальные значения $\mathbf{D}_{ki}^{(0)} \cdot (\mathbf{m}_k \mathbf{D}_{kj}^{(0)})$ – когда параллельны $\mathbf{D}_{ki}^{(0)}$ и $\mathbf{D}_{kj}^{(0)}$. Это случаи – «вытянутые» конфигурации. Напротив, минимальные значения – в противоположных случаях.

Свойство удобно проиллюстрировать геометрически:



ПРИМЕР.

Рассчитать вклад массогабаритных параметров звена 3 КМР ERA в элемент a_{33} матрицы инерционных коэффициентов



$$a_{33} = \sum_{k=3}^7 (C_i^{(0)T} * I_k^{(0)} * C_j^{(0)} + D_{ki}^{(0)T} * m_k * D_{kj}^{(0)})$$

Массогабаритные параметры звена 3 в связанной со звеном СК составляют:

$$I_{xc3} = 60.34 + 77.534 + 15.729 + 74.179 + 87.97 = 310.752 \text{ кгм}^2$$

$$I_{yc3} = 0.2692 + 0.547 + 0.0127 + 0.270 + 0.778 = 1.8779 \text{ кгм}^2$$

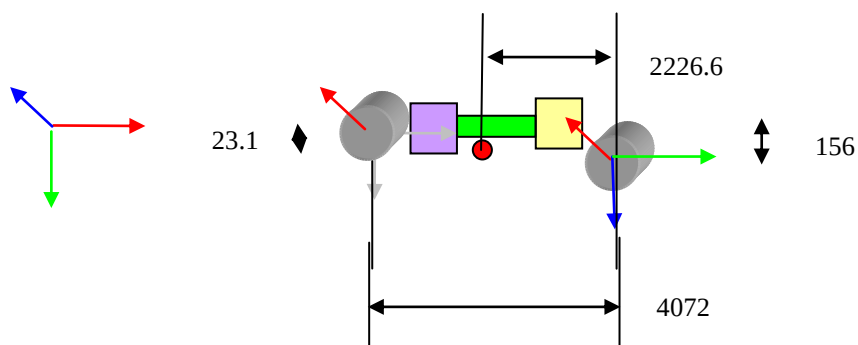
$$I_{zc3} = 66.335 + 77.534 + 15.74 + 74.179 + 88.171 = 321.959 \text{ кгм}^2$$

$$l_3 = (0.156 \quad 4.072 \quad 0)$$

Масса звена = сумме масс всех элементов конструкции звена

$$m_3 = 2 * 35.3 / 2 + 35.3 + 24 + 24.7 = 119.3 \text{ кг}$$

Координаты центра масс звена 3 в СК звена



$$Y_c = -4072 \cdot (35.3/2) - 3702 \cdot 35.3 - 2113.5 \cdot 24 - 500 \cdot 24.7 // m_3 = -2226.6 \text{ мм.}$$

$$X_c = -156 \cdot (35.3/2) - 156 \cdot 35.3 - 1556 \cdot 24 - 156 \cdot 24.7 // m_3 = -132.9 \text{ мм.}$$

$$Z_c = 0.0 \text{ мм.}$$

Расчет моментов инерции звена в инерциальной СК

$$I_{xc3}^{(0)} = I_{zc3} = 321.959 \text{ кгм}^2$$

$$I_{yc3}^{(0)} = I_{xc3} = 310.752 \text{ кгм}^2$$

$$I_{zc3}^{(0)} = I_{yc3} = 1.8779 \text{ кгм}^2$$

$$c_3^{(0)} = (1 \ 0 \ 0) - \text{орт оси } Z_2$$

$$R_{33}^{(0)} = (0, \ 0.023, \ 4.072 - 2.2266) \ 0 \approx (0 \ 0 \ 1.845)$$

$$D_{33}^{(0)} = \lambda(c_3^{(0)}) R_{33}^{(0)} = (0 \ -1.845 \ 0)$$

$$a_{33} = 321.959 + 119.3 \cdot 1.845^2 + \dots = 321.959 + 406.1 + \dots = 728.06 + \dots \text{ кгм}^2$$

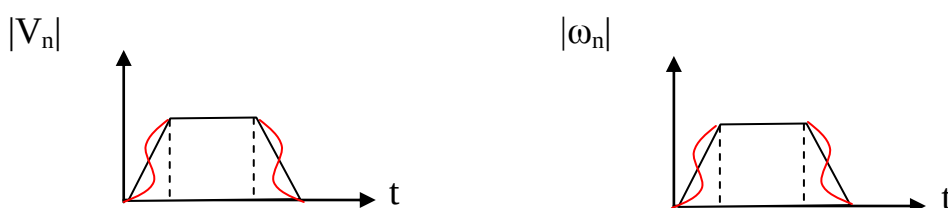
РАСЧЕТ ПОТРЕБНЫХ СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ ШАРНИРОВ ИМ МР и законов их изменения

В состав исходных данных на проектирование ИСУ входят параметры рабочей зоны (диапазоны изменения линейных и угловых координат ЗУМ) и законы изменения (в пределах рабочей зоны) во времени линейных и угловых скоростей рабочего органа (ЗУМ).

Для обеспечения этих законов необходимо, чтобы приводы степеней подвижности обладали соответствующими характеристиками, в том числе, - обеспечивали движение в шарнирах с необходимой скоростью.

Законы изменения скоростей ЗУМ, как правило, включают участки разгона, движения с постоянной скоростью и участки торможения.

Профиль изменения этих скоростей



Как правило, задаются профили изменения полных скоростей (модулей линейных и угловых) движения ЗУМ в декартовом пространстве. Отметим, что если в задании отсутствуют требования, например, к угловым скоростям, эти ограничения не принимаются в расчет.

В параметры законов движения ЗУМ входят – максимальные значения линейных и угловых скоростей, времена разгона и торможения, законы изменения скоростей на участках разгона и торможения.

Наиболее простые случаи соответствуют линейным законам изменения скоростей. В более ответственных случаях (ЕРА) – это синусоидальные законы изменения скоростей.

Из формул 3-го курса следует, что

$$\omega_n^{(0)} = \sum_{j=1}^n c_j^{(0)} \dot{q}_j,$$

$$// c_j^{(0)} = \tau_{0j} v_j \sigma_j,$$

$$V_n^{(0)} = \sum_{j=1}^n D_{nj}^{(0)} \dot{q}_j,$$

поэтому формальное решение этой задачи потребовало бы решения уравнений нижеследующего вида относительно неизвестных $\dot{q}_k$

$$\omega_n^{(0)2} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k^{(0)T} c_j^{(0)} \dot{q}_k \dot{q}_j,$$

$$V_n^{(0)2} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n D_{nk}^{(0)T} D_{nj}^{(0)} \dot{q}_k \dot{q}_j,$$

Это очень сложная задача, имеющая в общем случае, не единственное решение. Кроме того, нужно иметь в виду, что в составе СУ МР – ТСУ, задача которой – расчет плановых значений координат в функции времени в соответствии с заданными законами изменения декартовых координат ЗУМ. Поэтому полученное решение по квадратичным формам может не обеспечиваться с учетом работы ТСУ. Именно в задачу ТСУ входит определение законов изменения координат шарниров по заданному закону изменения декартовых координат ЗУМ МР.

Поэтому при расчете потребных значений часто исходят из того, что требуемые значения скоростей ЗУМ должны обеспечиваться при движении ИМ только в одном, рассматриваемом шарнире. Отметим, что это допущение не является абсолютно строгим, поскольку в реальности такой алгоритм управления является редким. ТСУ работают так, что обеспечивают одновременное движение в нескольких шарнирах. В то же время, есть и режим одиночного движения и он также должен быть обеспечен.

Поэтому при расчете потребных значений скоростей шарниров вместо () мы будем рассматривать систему соотношений след вида:

$$\begin{aligned} \omega_n^{(0)2} &= c_k^{(0)T} c_k^{(0)} \dot{q}_k^2 \\ V_n^{(0)2} &= D_{nk}^{(0)T} D_{nk}^{(0)} \dot{q}_k^2 \end{aligned}$$

при $k = 1, 2, \dots, n$.

Мы знаем, что $c_k^{(0)} = c_k^{(0)}(q_l)$, $D_{nk}^{(0)} = D_{nk}^{(0)}(q_l)$.

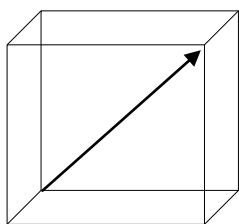
Поэтому расчеты потребных скоростей изменения координат выполняются в точках, где $D_{nk}^{(0)T} D_{nk}^{(0)} = \min$.

Очевидно, что $c_k^{(0)T} c_k^{(0)} = 1$ поэтому при расчете потребных скоростей пользуются вторыми соотношениями, а первые обеспечиваются

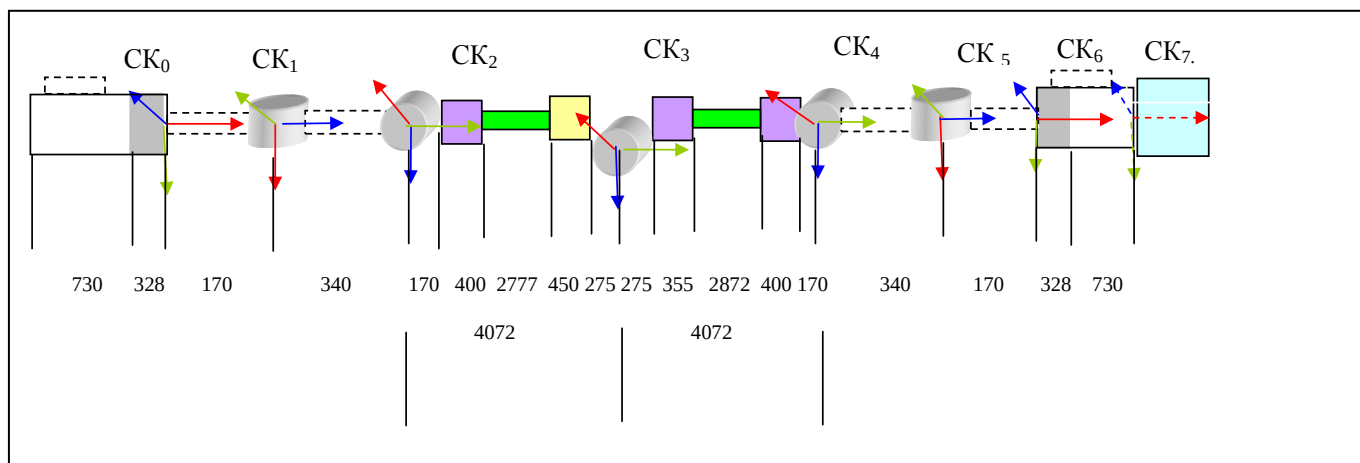
соответствующими конструктивными решениями (3 ориентирующие степени дают три компоненты угловых скоростей ЗУМ) ($k = n-1, n-2, n-3 \dots$).

При этом второе соотношение используется при расчете скоростей переносных степеней подвижности МР ($k = 1, 2, 3$).

Повторим, одновременно, чаще всего, работают по три шарнира – в переносных и в ориентирующих степенях. При этом обеспечивается пространственное перемещение, что соответствует диагонали куба (параллелепипеда). Очевидно, что если обеспечивается требуемый максимум по одной из граней, то по диагонали уж точно будет обеспечиваться больше (по формуле диагонали куба). Это относится и к ориентирующим и к переносным степеням подвижности (у кубов свои параметры и размерности).



Поэтому, предположение о раздельном движении является достаточным условием решения этой задачи. Отметим, что это условие не является необходимым.



Например, для ERA в вытянутой конфигурации

$$D_{73} = (4072 + 4072 + 340 + 170 + 328 + 730) = (0 - 9712 \ 0).$$

Максимальная скорость ЗУМ ERA = 0.1 м/сек

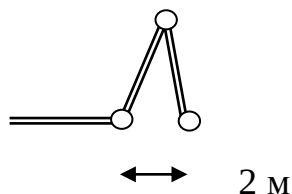
Тогда максимальная скорость движения q_3 (в данной конфигурации !!!) составит

$$q'_3 = 0.1 / 9.712 = 0.0103 \text{ 1/сек.}$$

Потребную скорость движения ЗУМ нужно рассчитывать в конфигурации, когда

$$|D_{73}| = \min.$$

Теоретически $|D_{73}| = 0$, однако на практике такое невозможно из конструктивных соображений. Из-за конструктивных особенностей (в том числе – ограничений шарниров) нельзя «сложить» ИМ компактнее, чем



Для ERA этот минимум составит примерно 1 м (изменение в 10 раз).

Тогда максимальная скорость движения во втором шарнире составит 0.1 1/сек.

Практически максимальное значение скорости этого шарнира у ERA составляет 0.05 1/сек. Меньшее, чем требуется по данному расчету значение принято исходя из того, что ТСУ этого робота обеспечивает распределение движений по нескольким шарнирам, в частности, при одновременной работе 3-го и 4-го привода. Планирование траекторий обеспечивает сложение скоростей.

Мы будем пользоваться приведенными выше формулами. Из примера видно, что при этом происходит завышение требуемых скоростей.

Отметим, что обеспечение требуемого максимума скоростей требует изменения скорости движения в 3-м шарнире в 10 раз. Наряду с максимальными, в ТЗ «закладываются» и минимальные значения скоростей (мы их в расчет не берем). Соотношение макс и мин скоростей схвата, например, в 100 раз (что обычно), требуется макс и мин привода в 1000, что обуславливает необходимость принятия специальных технических решений при конструировании приводов. У ERA мин скорость – $4.5 \cdot 10^{-5}$ 1/сек.

$$0.05 / 0.000045 = 1111.0$$

Аналогично рассчитываются требуемые скорости по всем шарнирам. При этом в расчетах участвуют значения D_{ni} независимо, при этом расчетные конфигурации для разных шарниров, в общем случае, не совпадают.

Идем дальше. При известных требуемых значениях скоростей шарниров можно построить графики изменения их во времени (участки разгона и торможения).

Для ориентирующих степеней подвижности в расчетах участвуют соотношения вида

$$\omega_n^{(0)2} = \mathbf{c}_k^{(0)T} \mathbf{c}_k^{(0)} \dot{q}_k^2 \quad |\omega_n^{(0)}| = |\dot{q}_k|.$$

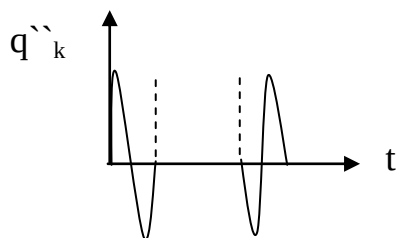
k – для ориентирующих степеней подвижности.

При расчете на данном этапе мы будем предполагать неизменными значения $|D_{73}|$ (хотя это не так, при движении D_{73} изменяются из-за изменения координат шарниров q_i). Все допущения проверяются потом путем моделирования реальных движений МР.

Тогда законы изменения во времени координат шарниров на участках разгона и торможения как бы пропорциональны соответствующим законам изменения декартовых координат ЗУМ.



Исходя из этого, получим законы изменения во времени ускорений



ДРУГИЕ ВАРИАНТЫ РАСЧЕТА ПОТРЕБНЫХ СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЯ ЗУМ:

1. Как решение обратной задачи о скорости,
2. Как решение обратной позиционной кинематической задачи.

Более точными являются расчеты, основанные на решении обратных задач. Эти расчеты и применяют при проверке и уточнении результатов предварительных расчетов. Это будет Вами сделано на лабораторных занятиях в Дмитрове. При выполнении курсового проекта Вам следует сделать это по упрощенной методике.

ПОСТРОЕНИЕ НАГРУЗОЧНЫХ ДИАГРАММ ПРИВОДОВ ШАРНИРОВ МР

Один из этапов проектирования ИСУ – выбор силовых модулей (двигатель + редуктор) приводов ИСУ. На этом этапе проводится анализ энергетических характеристик ОР приводов. В нашем случае роли ОР выступает многозвенный ИМ.

Как известно, под энергетическими характеристиками понимают совокупность соотношений, определяющих значения моментов и мощностей, потребляемых ОР при движении по заданному закону в основных режимах работы.

Как мы уже знаем, для МР задаются законы движения ЗУМ. В предыдущем разделе мы рассмотрели, как эти законы трансформируются в законы движения отдельных приводов сочленений $q_i^*(t)$. Здесь и ниже * мы будем отмечать заданные значения соответствующих переменных. Реальные значения – без этого символа.

Зная q_i^* , находим q_i^* и q_i^{**} . Отметим, что вместо $q_i^*(t)$ могут быть заданы законы изменения $q_i^*(t)$. Тогда q_i^* и q_i^{**} вычисляются путем дифференцирования координат сочленений.

Моменты (или силы – для поступательных сочленений !) M_{hi} , «потребляемые» ИМ при его движении по заданному закону $q_i^*(t)$ рассчитываются по формуле

$$M_{hi} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \ddot{q}_j + b_i + \mu_{vi} + \mu_{ti},$$

где

μ_{ti} – момент (или сила !), обусловленный силами сопротивления движению в i -м сочленении (силы сухого и вязкого трения, прочие силы).

Мощность, потребляемая ОР при движении по заданному закону, в одном сочленении, составляет

$$P_{hi} = M_{hi} \dot{q}_i$$

В общем случае моменты (силы), действующие со стороны объекта регулирования, носят распределенный характер (двигатель, редуктор, конструкция сочленения). При энергетическом анализе их приводят либо к валу двигателя, либо к валу нагрузки с учетом потерь в механической передаче, т.е. с учетом КПД редуктора.

Однако, как правило, на предварительном этапе энергетического анализа параметры силового редуктора неизвестны. Однако, известны аналоги. Поэтому, исходя из опыта, принимают КПД некоторого условного редуктора и мощность, потребляемую ОР в одном сочленении представляют в виде

$$P_{hi} = M_{hi} \dot{q}_i / \eta^{\pm 1}$$

Где

$$+ \text{ при } P_{hi} = M_{hi} \dot{q}_i > 0$$

$$- \text{ при } P_{hi} = M_{hi} \dot{q}_i < 0$$

Приведенные с учетом КПД редуктора значения M_{hi} записывают так

$$M_{hi}^H = M_{hi} / \eta^{\pm 1} - \text{вал нагрузки}$$

$$M_{hi}^B = M_{hi}^H = M_{hi} / i\eta^{\pm 1} - \text{вал двигателя}$$

Из приведенной выше формулы M_{ni} вытекает зависимость нагрузочного момента (силы) одного сочленения от параметров движения всех сочленений. В действительности это так и происходит. Так и делают на этапе анализа принятых проектных решений.

На первоначальном же этапе движения в сочленениях полагаются независимыми. Тогда формулы для расчета приведенных нагрузочных моментов (сил) принимают вид

$$M_{ni} = a_{ii} \ddot{q}_j + \mu_{vi} + \mu_{Ti},$$

Энергетические характеристики силового агрегата выбираются с учетом параметров нагрузочных характеристик ИМ. Основа – это нагрузочные диаграммы – зависимости скоростей движения ОР в функции от приведенных моментов (сил) нагрузки.

Однако это не является достаточным. Дело в том, что сами силовые агрегаты имеют собственные инерционные составляющие, а также моменты (силы) сопротивления. Поэтому выбор энергетических характеристик силовых агрегатов производится по итерационной методике, известной как энергетический расчет. Вы это проходили.

В результате применения этой методики осуществляется выбор двигателя и передаточного числа редуктора.

Энергетические соотношения будут обеспечены полностью, если нагрузочные диаграммы системы «ИМ - силовой агрегат» будут располагаться целиком в области, охватываемой механическими характеристиками выбранного двигателя.

Для учета нагрузочных характеристик силовых агрегатов рассматриваются соотношения следующего вида

$$M_{Hj} = i_j * \eta_j^{\pm 1} * (M_{\partial j} - M_{\partial ej});$$

здесь $M_{\partial j}$ - момент (сила), развиваемая двигателем без учета потерь на преодоление сил инерции, трения и пр., в силовом агрегате,

$M_{\partial ej}$ - то же, но включающее влияние указанных выше сил и моментов.

Последнее выражение имеет вид

$$M_{\partial ej} = J_{dj} \alpha''_{dj} + M_{трj}.$$

В этом случае формула для расчета нагрузочных характеристик принимает вид

$$i_j M_{dj} = M_{нj} / \eta_j^{\pm 1} + i_j M_{двj}$$

С учетом выражения

$$i_j M_{dj} = (a_{ji} q''_j + \mu_{vj} + \mu_{тj}) / \eta_j^{\pm 1} + i_j (J_{dj} \alpha''_{dj} + M_{гдж}) = \\ (a_{ji} / \eta_j^{\pm 1} + i_j^2 J_{dj}) q''_j + (\mu_{vj} + \mu_{тj}) / \eta_j^{\pm 1} + i_j M_{гдж},$$

поскольку

$$q''_j = \alpha''_{dj} / i_j.$$

Формула расчета нагрузочного момента (силы) привода может быть приведена к валу двигателя:

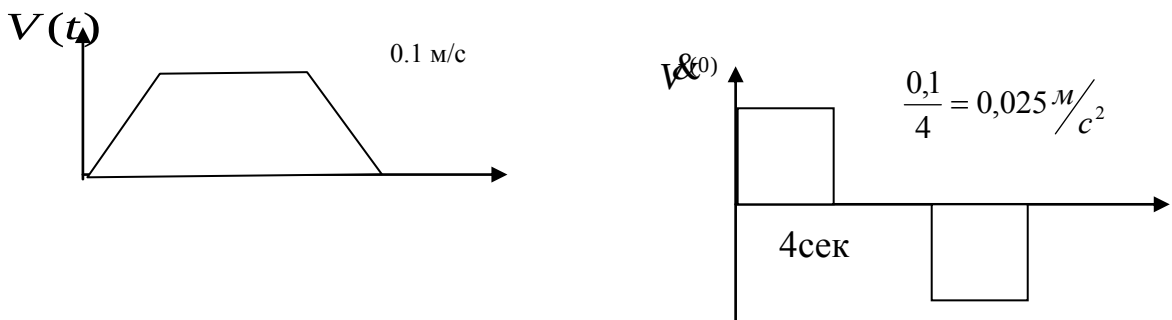
$$M_{dj} = (a_{ji} / \eta_j^{\pm 1} + i_j^2 J_{dj}) / i_j * q''_j + (\mu_{vj} + \mu_{тj}) / i_j \eta_j^{\pm 1} + M_{трj},$$

Привод будет в состоянии обеспечить требуемых закон движения, если подобная нагрузочная характеристика $M_{dj}(q''_j)$ ОР охватывается механической характеристикой двигателя.

ЗАМЕЧАНИЕ. Механическая характеристика двигателя не включает моменты (мощности), расходуемые на преодоление сил инерции его подвижных частей. Однако в нее могут входить потери на трение. В этом случае их следует исключить из последнего выражения.

ПРИМЕР.

Задан следующий закон движения ERA.



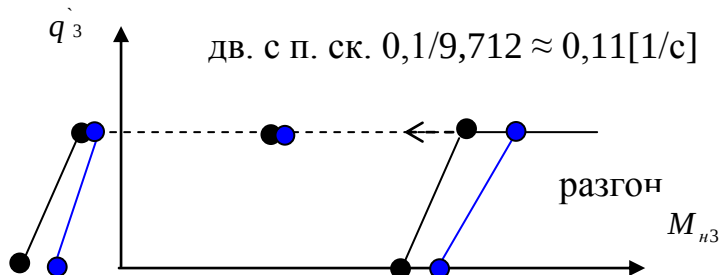
Построим нагрузочные диаграммы для привода локтя (9.712 м).

Возьмем наихудший случай – вытянутое положение (для простоты, в реальности в такой конфигурации движения не происходит).

$$a_{33} * \ddot{\varphi}_3 + K_{BT3} * \dot{\varphi}_3 = M_{H3};$$

Инерцией и трением в силовом модуле пока пренебрежем.

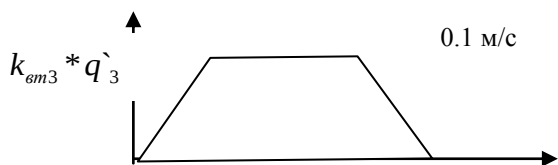
$$a_{33} = 728.06 + \dots \text{ кгм}^2$$



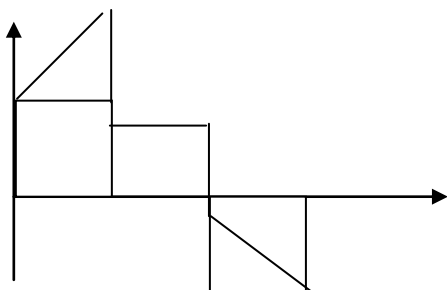
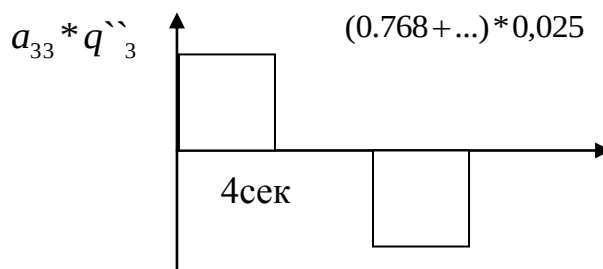
$$(728.06 + \dots) * 0,025 = [\text{кг.м}^2]/\text{с}^2 = [\text{НМ}]$$

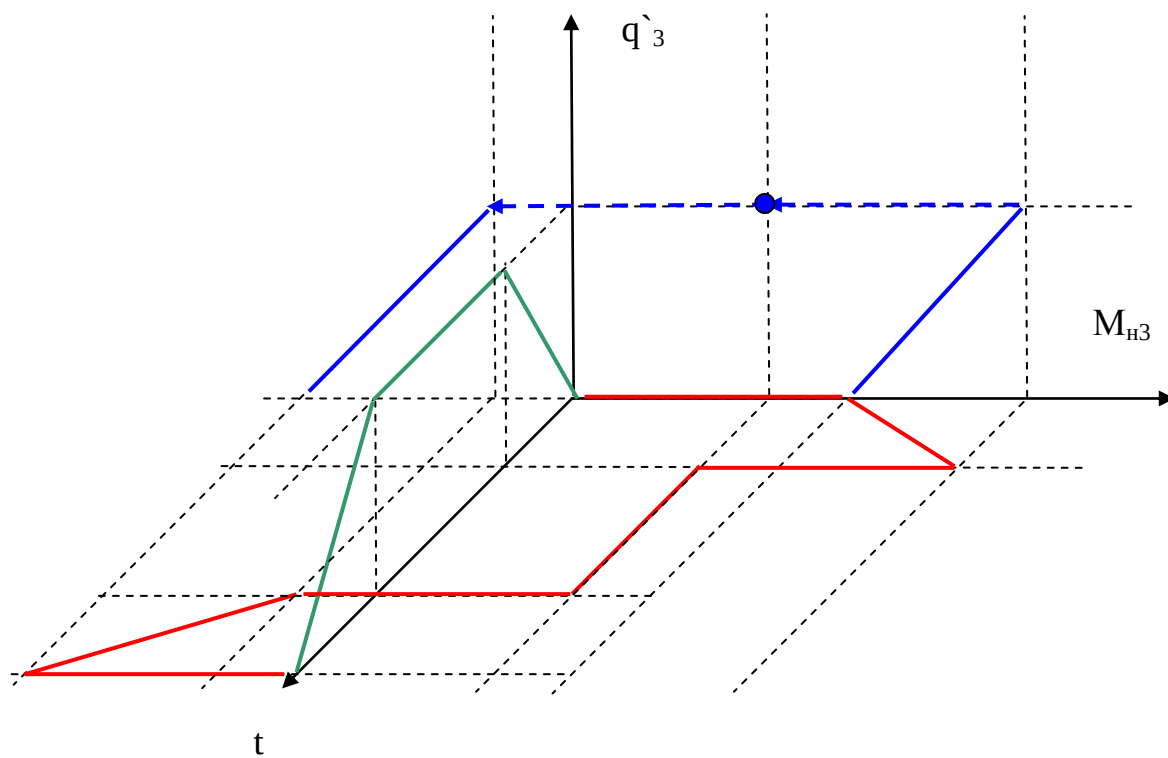
ОШИБКА! Нужно пересчитать в угловые скорости и ускорения

При учете КПД редуктора $M_H / \eta^{\pm 1}$ (масштаб по оси моментов - сил) изменяется в $\eta^{\pm 1}$ раз в зависимости от знака произведения $M_{Hi} \dot{q}_i$ (график вытягивается или сжимается вдоль оси M) (синий цвет на предыдущем графике).

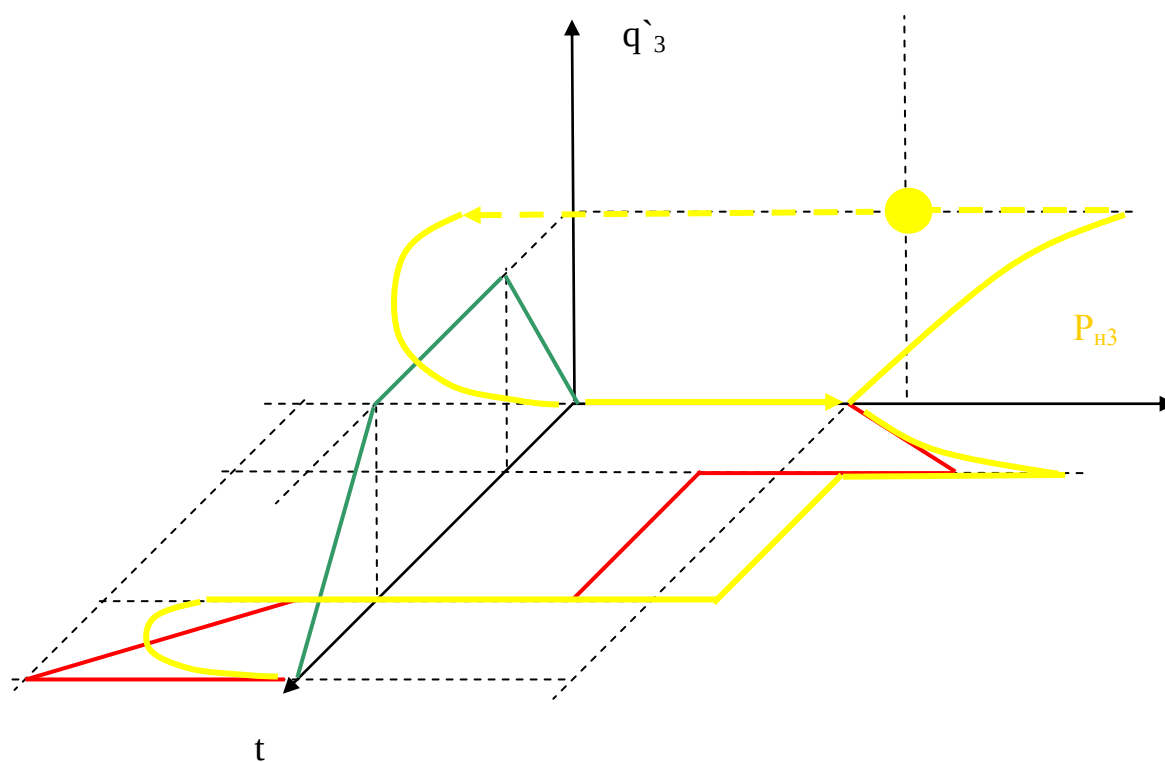


$M_H(t)$





При энергетическом расчете бывает нужно строить графики изменения мощности в функции от скорости движения ОР.



Переход к «приведенной» мощности происходит с изменением масштаба оси X , аналогично предыдущему.

На начальных этапах проектирования ИСУ нагрузочные характеристики строятся в предположении независимой работы приводов, в том числе, возможности их работы по-одному. В реальности происходит согласованная работа нескольких приводов одновременно. Координация их движений обеспечивается в ТСУ. Кроме того, реальные законы движения МР из-за погрешностей приводов, отличаются от расчетных (заданных). В этой связи реальные нагрузочные характеристики могут существенно отличаться от расчетных.

Точный вид нагрузочных характеристик устанавливается путем моделирования процессов с учетом работы как ИСУ так и ТСУ. Моделирование осуществляется с использованием специальных программ для ЭВМ. С одной из таких программ вы познакомитесь на лабораторных занятиях в ДФ. На курсовом проекте можно использовать методику, описанную в данном разделе.

Практика показывает, что подобная методика приводит к завышенным результатам (до 1.5 раз).

Часто строят нагрузочные диаграммы ОР без учета нагрузочных характеристик двигателя и силового редуктора. При таком расчете предлагается выбор двигателя осуществлять по мощности, в том числе, с учетом форсировок по скорости и моменту. Полагают, что потребная мощность двигателя должна быть в 2 раза выше той, что получается в результате анализа энергетических характеристик ОР без двигателя. (Мощность двигателя как бы расходуется поровну между ОР и силовым модулем).

АНАЛИТИЧЕСКОЕ и СТРУКТУРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ объектов управления приводов ИСУ

Из соотношения //

$$i_j M_{dj} = M_{nj} / \eta_j^{\pm 1} + i_j M_{двj}$$

следует, что

$$i_j \eta_j^{\pm 1} M_{dj} = M_{nj} + i_j \eta_j^{\pm 1} M_{двj}$$

Ранее мы записывали соотношения для расчета

$$M_{nj} = a_{jj} \ddot{q}_j + \mu_{vj} + \mu_{ji},$$

и

$$M_{двj} = J_{dj} \alpha_{dj}^{\pm 1} + M_{трj}$$

Подставим последние выражения во вторую формулу, получим

$$i_j \eta_j^{\pm 1} M_{dj} = a_{jj} \ddot{q}_j + \mu_{vj} + \mu_{ji} + i_j \eta_j^{\pm 1} (J_{dj} \alpha_{dj}^{\pm 1} + M_{трj})$$

Учитывая, что

$$\alpha_{dj} = q_j i_j,$$

разрешим полученное уравнение относительно q_j :

$$i_j \eta_j^{\pm 1} M_{dj} = a_{jj} \ddot{q}_j + \mu_{vj} + \mu_{тj} + i_j \eta_j^{\pm 1} (J_{dj} \alpha_{dj}^{\pm 1} + M_{трj})$$

$$(a_{jj} + i_j^2 \eta_j^{\pm 1} J_{dj}) \ddot{q}_j = i_j \eta_j^{\pm 1} M_{dj} - \mu_{vj} - (\mu_{тj} + i_j \eta_j^{\pm 1} M_{трj}).$$

Обозначим

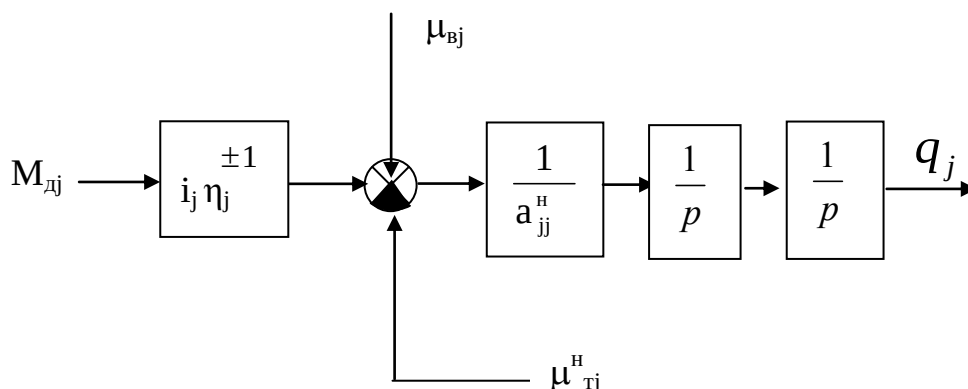
$a_{jj}^H = a_{jj} + i_j^2 \eta_j^{\pm 1} J_{dj}$ – приведенный к валу нагрузки момент инерции (масса) ИМ как ОР j-го привода с учетом инерции подвижных частей силового модуля (двигатель + редуктор),

$\mu_{тj}^H = \mu_{тj} + i_j \eta_j^{\pm 1} M_{трj}$ – приведенный к валу нагрузки момент (сила) трения в нагрузке j-го привода с учетом сил трения в сочленении и сил трения в двигателе + редукторе.

Тогда последнее уравнение можно переписать так

$$a_{jj}^H \ddot{q}_j = i_j \eta_j^{\pm 1} M_{dj} - \mu_{vj} - \mu_{тj}^H.$$

Последнее уравнение можно представить в виде следующей структурной схемы



$\mu^H_{тj}$ - силы (моменты) сухого и вязкого трения, как правило, являются функциями производных выходных координат. В частности, если

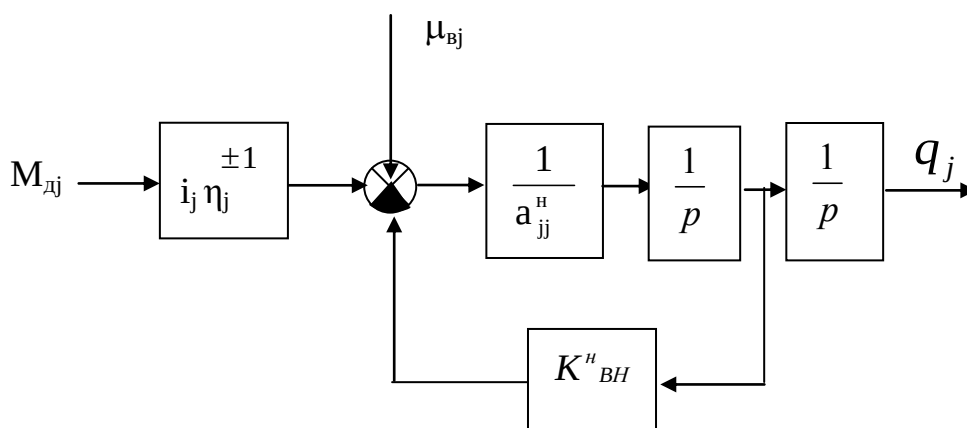
$$\mu_{тj} = K_{BH} \dot{q}_j,$$

$$M_{тj} = K_{B\partial} \dot{\alpha}_{\partial j}$$

То

$$\mu^H_{тj} = (K_{BH} + i^2_{j \eta_j} \pm 1 K_{B\partial}) \dot{q}_j = K^H_{BH} \dot{q}_j$$

и структурная схема рис. примет вид:



Структура такого вида служит основой для выполнения динамического синтеза приводов ИСУ.

На этом этапе полагают КПД редуктора равным единице.

Формирование M_{dj} обеспечивается за счет работы двигателя как преобразователя электрические сигналы на своем входе.

Это, следуя сложившейся терминологии – объект регулирования привода.

АНАЛИТИЧЕСКОЕ и СТРУКТУРНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ неизменяемой части СП ИСУ

С учетом омического сопротивления обмоток управления, а также противо-ЭДС формула для расчета M_{dj} принимает вид

$$M_{dj} = \frac{K_{mj}}{L_j * p + R_j} (U_j - K_{\omega j} i_j q_j)$$

U_j – сигнал управления двигателем,

$K_{\omega j}$ – к-т противоЭДС,

L_j – индуктивность обмотки управления,

R_j – активное сопротивление.

K_{mj} – к-т передачи двигателя по моменту.

После подстановки M_{dj} в уравнение / /

$$a_{jj}^H q_j = i_j \eta_j^{\pm 1} M_{dj} - \mu_{vj} - \mu_{tj}^H,$$

получим

$$a_{jj}^H q_j = i_j \eta_j^{\pm 1} \frac{K_{mj}}{L_j * p + R_j} (U_j - K_{\omega j} i_j q_j) - \mu_{vj} - \mu_{tj}^H.$$

Если принять

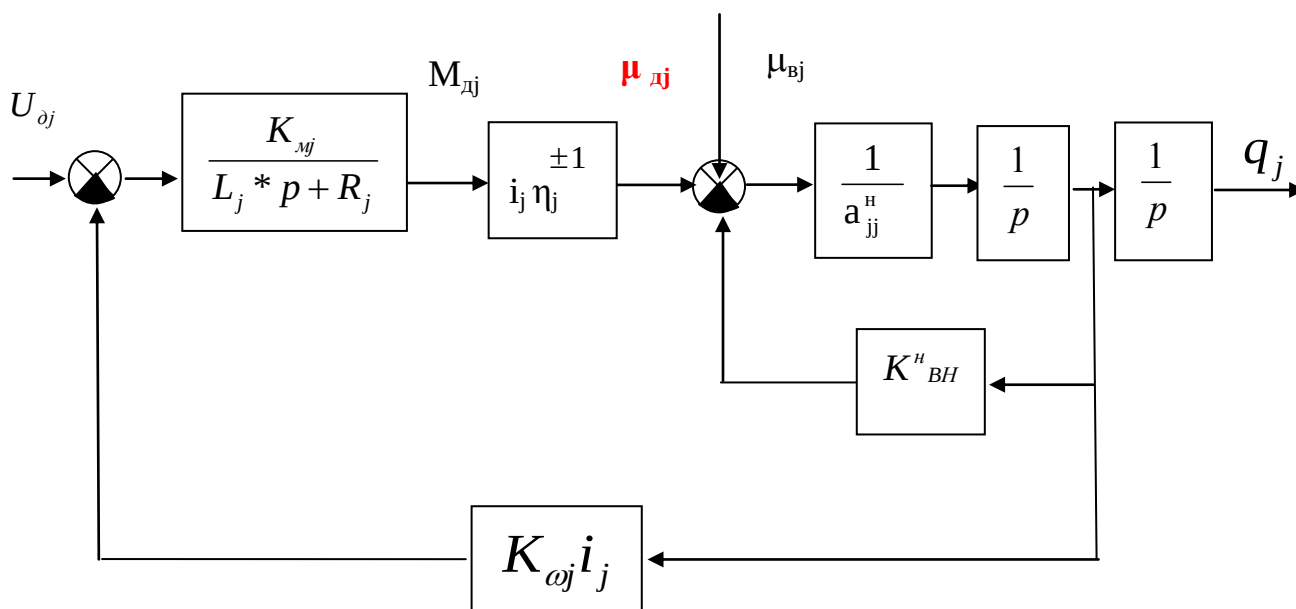
$$\mu_{tj}^H = K_{BH}^H q_j$$

будем иметь

$$a_{jj}^H q_j = i_j \eta_j^{\pm 1} \frac{K_{mj}}{L_j * p + R_j} (U_j - K_{\omega j} i_j q_j) - \mu_{vj} - K_{BH}^H q_j.$$

Представленное уравнение описывает свойства

Последнее уравнение можно представить в виде следующей структурной схемы



Из структуры видно, что момент (сила), развиваемые приводом, зависят от электрических параметров цепей управления и расходуются на преодоление сил и моментов инерции, внешних сил и сил трения в ИМ и, в самом двигателе.

Напомним, что соотношения не учитывают силы и моменты динамического взаимодействия приводов.

Введем дополнительное обозначение

$$\mu_{dj} = M_{dj} \cdot i_j \eta_j^{\pm 1}$$

- момент (сила) на выходном валу привода.

Из структуры видно, что момент (сила), развиваемые приводом, зависят от электрических параметров цепей управления и расходуются на преодоление сил и моментов инерции, внешних сил и сил трения в ИМ и, в самом приводе.

Этот момент (сила) – функция соответствующих управляющих воздействий и координат ИМ.

Уравнение () и структура отражают свойства т.н. неизменяемой части привода, - компоненты, которая является основой при динамическом расчете следящих систем. Неизменяемая часть включает свойства ОР и цепей управления.

В линейном приближении эта зависимость может быть отражена так

$$a_{jj}^H * p^2 * q_j = W_{mj}(p) * U_{\omega j} - W_{cj}(p) * q_j - \mu_{Bj}.$$

где

$W_{mj}(p)$ - передаточная функция неизменяемой части следящего привода по отношению к управляющему воздействию,

$W_{cj}(p)$ - передаточная функция НЧ СП по отношению в регулируемой переменной.

Обе передаточные функции устанавливают зависимость момента (силы) на выходном валу привода в функции от управляющих воздействий и регулируемых переменных.

При выполнении предварительных расчетов динамики КПД редуктора обычно пренебрегают. Мы тоже последуем этому подходу.

Выражения для расчета этих передаточных функций имеют вид

$$W_{CHj}(p) = \frac{M_{CHj}(p)}{N_{Hj}(p)};$$

$$W_{MHj}(p) = \frac{M_{MHj}(p)}{N_{Hj}(p)};$$

$$\begin{cases} M_{CHj}(p) = (K_{BH}^H * (L_j * p + R_j) + i_j^2 * K_{\omega j} K_{mj}) p \\ M_{MHj}(p) = i_j * K_{mj} \\ N_{Hj}(p) = L_j * p + R_j \end{cases}$$

Предлагаем получить их самостоятельно.

С учетом введенных обозначений запишем уравнения неизменяемой части одного СП в виде «вход-выходных» соотношений

Обозначим:

$$W_{Hj}(p) = \frac{W_{MHj}(p)}{a'_{jj} * p^2 + W_{CHj}(p)} - \text{п.ф. неизменяемой части привода (по}$$

отношению к упр. воздействию).

$$W_{HBj}(p) = \frac{1}{a'_{jj} * p^2 + W_{CHj}(p)} - \text{п.ф. НЧ СП по отношению к возмущению (по}$$

моменту).

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{Hj}^{-1}(p) = \frac{a'_{jj} * p^2 + W_{CHj}(p)}{W_{MHj}(p)} \\ W_{HBj}^{-1}(p) = a'_{jj} * p^2 + W_{CHj}(p) \end{array} \right\} - \text{обр. п.ф. НЧ СП по отношению к}$$

управляющему воздействию и возмущению.

Обратные ПФ удобно представлять в виде суммы двух слагаемых

$$W_{Hj}^{-1}(p) = \frac{a''_{jj} * p^2}{W_{MHj}(p)} + \frac{W_{CHj}(p)}{W_{MHj}(p)}.$$

Обратные передаточные функции НЧ и соответствующие им ЧХ составляют основу для динамического расчета (синтеза) СП.

ПРИМЕР.

Построим обратную ЧХ НЧ привода тангажа плеча КМР ERA.

$$\frac{a''_{jj} * p^2}{W_{MHj}(p)} = \frac{a''_{jj} * R_j (1 + \tau_{эj}) p^2}{i_j * K_{mj}}$$

$$\frac{W_{CHj}(p)}{W_{MHj}(p)} = \frac{M_{CHj}(p)}{M_{MHj}(p)} = (K''_{BH} * R_j (\tau_{эj} * p + 1) + i_j^2 * K_{oj} K_{mj}) p / i_j * K_{mj}$$

$$K''_{BH} = (K_{BH} + i_j^2 \eta_j^{\pm 1} K_{B\partial})$$

$$K_{B\partial} \text{ положим } = 0.$$

В итоге второе слагаемое примет вид

$$(K_{BH} * R_j(\tau_{эj} * p + 1) + i_j^2 * K_{\omega j} K_{mj}) p / i_j * K_{mj} =$$

$$K_{BH} * R_j(\tau_{эj} * p + 1) p / (i_j * K_{mj}) + i_j * K_{\omega j} p$$

$$K_{BH} = 0$$

Численные значения параметров следующие

ДБМ – 120

$$K_{\omega} = 0,531 \text{ в с}$$

$$\begin{cases} K_M = 0,476 \text{ Нм/а} & I_{\phi} = 0,001 \text{ кг.м}^2 \\ R = 5,4 \text{ Ом} & i = 450 \\ & \tau_{э} \approx 0,0006 \text{ с} \end{cases}$$

$$a_{33} = 728.06 + \dots \text{ кгм}^2 = 2000 \text{ кгм}^2$$

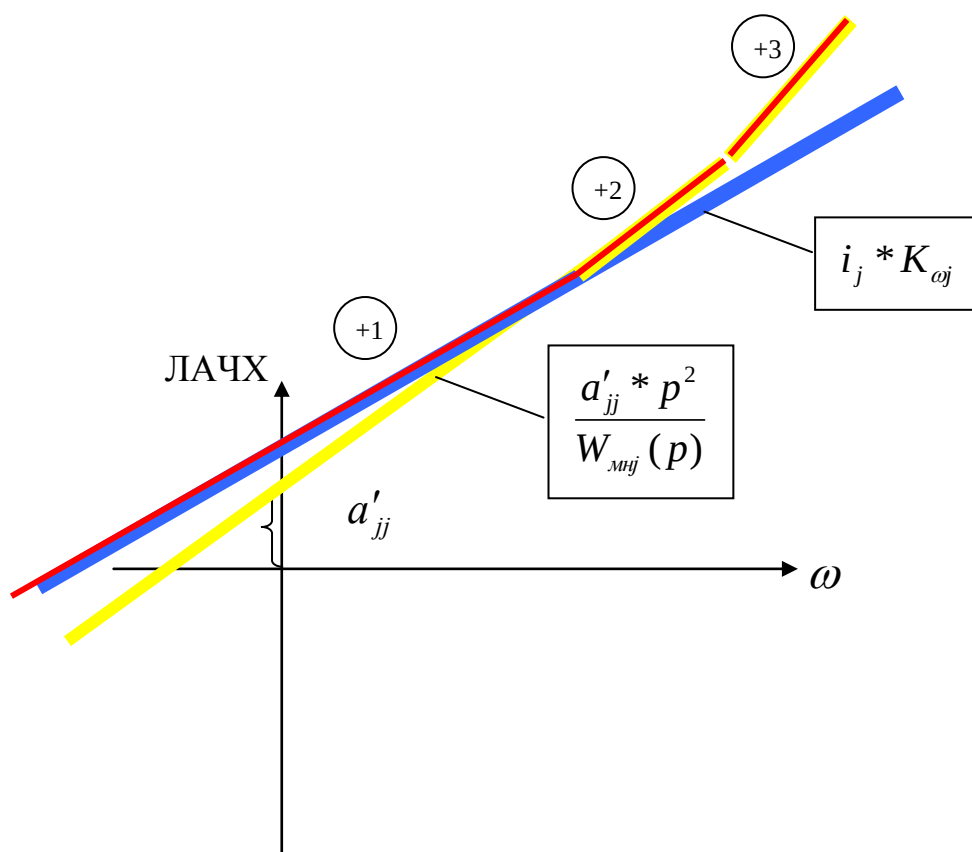
$$I_{\phi} * i^2 = 0,001 * 450^2 \approx 202,5 \text{ кг.м}^2;$$

$$a'_{22} = 2202.5 \text{ кг.м}^2.$$

$$R / (i K_M) = 5.4 / (450 * 0.476) = 0.025 \quad / \text{ Н} = \text{кгм/сек}^2 /$$

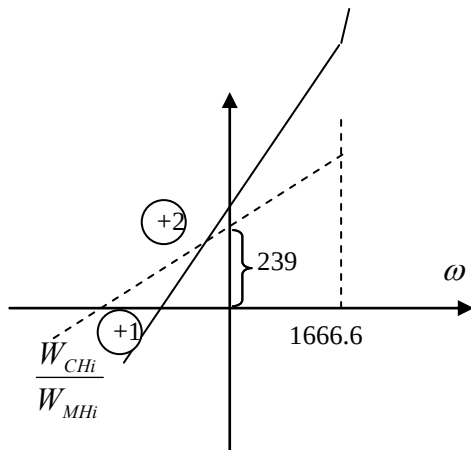
$$a'_{33} R / (i K_M) = 2202.5 * 0.025 = 55.06 \quad / \text{ размерность ???} /$$

$$i_j * K_{\omega j} = 450 * 0.531 = 239$$

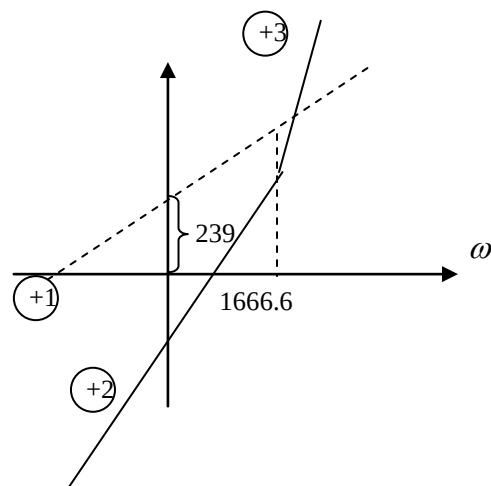


ПОКАЗАТЬ ВАРИАЦИЮ ЛАЧХ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ЗНАЧЕНИЯ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ.

$$1/\tau_3 = 1/0.0006 = 1666.6$$



Увеличение нагрузки



Уменьшение нагрузки

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ДИНАМИЧЕСКОГО СИНТЕЗА СП ИСУ МР НА ОСНОВЕ ОБРАТНЫХ ЛАЧХ

Исходные данные

- закон движения ОР (ИМ) $q^*(t)$,
- максимальная погрешность слежения за входным воздействием (в декартовом пространстве),
- требования к качеству динамических процессов,
- требования к фильтрующим свойствам.

По первой строке – закон определили ранее – по заданному закону движения ЗУМ.

Третья строка – требования «апериодичности» переходных процессов. Перерегулирование в большинстве случаев недопустимо, т.к. приводит к возможному столкновению ЗУМ с внешними объектами.

Фильтрующие свойства задаются в традиционной постановке, с целью минимизировать потери на нагрев двигателя. При этом нужно иметь в виду изменение свойств ЧХ ОВП в высокочастотной области, обусловленное динамическим взаимовлиянием (см. ниже).

При расчете допустимых погрешностей основываются на том, что для малых отклонений угловых и декартовых координат справедливы следующие выражения

$$\delta\alpha^2 = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n c_k^{(0)T} c_j^{(0)} \delta q_k \delta q_j,$$

$$\delta X_n^{(0)2} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n D_{nk}^{(0)T} D_{nj}^{(0)} \delta q_k \delta q_j,$$

аналогичные используемым ранее при расчете потребных скоростей движения ИМ в сочленениях. Здесь $\delta\alpha$ – заданная максимальная погрешность слежения по угловым координатам ЗУМ.

На этом этапе также как и ранее предполагается независимая работа приводов. Поэтому

$$\delta\alpha^2 = \delta q_k^2$$

$$\delta X_n^{(0)2} = D_{nk}^{(0)T} D_{nk}^{(0)} \delta q_k^2$$

$k = 1, 2, \dots, n.$

Принимаются максимальные для каждого из k значения погрешностей.

ЭКВИВАЛЕНТИРОВАНИЕ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ СЛЕДЯЩИХ ПРИВОДОВ ИСУ МР

При проектировании множество возможных входных сигналов заменяют одним эквивалентным. В методике обратных ЛАЧХ входной сигнал k -го привода с параметрами, определенными выше, аппроксимируется синусоидой (или ее

частью), имеющей аналогичные заданным в составе ИД, параметры («эквивалентная синусоида»), а именно: для k-го привода

- выбираются максимальные значения $\beta'_{\max} = q'_{\max k}$
- выбираются максимальные значения $\beta''_{\max} = q''_{\max k}$
- выбираются максимальные значения $\beta'''_{\max} = q'''_{\max k}$.

Исходный входной сигнал с параметрами $(q'_{\max k} \quad q''_{\max k} \quad q'''_{\max k})$ заменяется сигналом синусоидального вида с параметрами $(\beta'_{\max} \quad \beta''_{\max} \quad \beta'''_{\max})$.

Этот сигнал может включать также постоянную скоростную составляющую β'_0 или аппроксимироваться отрезком синусоиды.

В первом случае входной сигнал задается в виде

$$\beta(t) = \beta'_0 t + \beta_a \sin \omega_p t$$

β'_0 – амплитуда скоростной составляющей,

β_a – амплитуда гармонической составляющей входного воздействия.

Параметры эквивалентной синусоиды вычисляются исходя из следующих соотношений

$$\beta'_{\max} = \beta'_0 + \beta_a \omega_p$$

$$\beta''_{\max} = \beta_a \omega_p^2$$

$$\beta'''_{\max} = \beta_a \omega_p^3$$

Отсюда (2-е и 3-е соотношения)

$$\omega_p = \beta'''_{\max} / \beta''_{\max}$$

$$\beta_a = \beta'''_{\max}^3 / \beta'''_{\max}^2$$

При этом должно выполняться соотношение

$$\beta'_0 = \beta'_{\max} - \beta_a \omega_p > 0$$

Отсюда следует, что

$$\beta'_{\max} - \beta_a \omega_p = \beta'_{\max} - (\beta'''_{\max}^3 / \beta'''_{\max}^2) (\beta'''_{\max} / \beta''_{\max}) =$$

$$\beta'_{\max} - (\beta''_{\max}^2 / \beta'''_{\max}) > 0$$

или

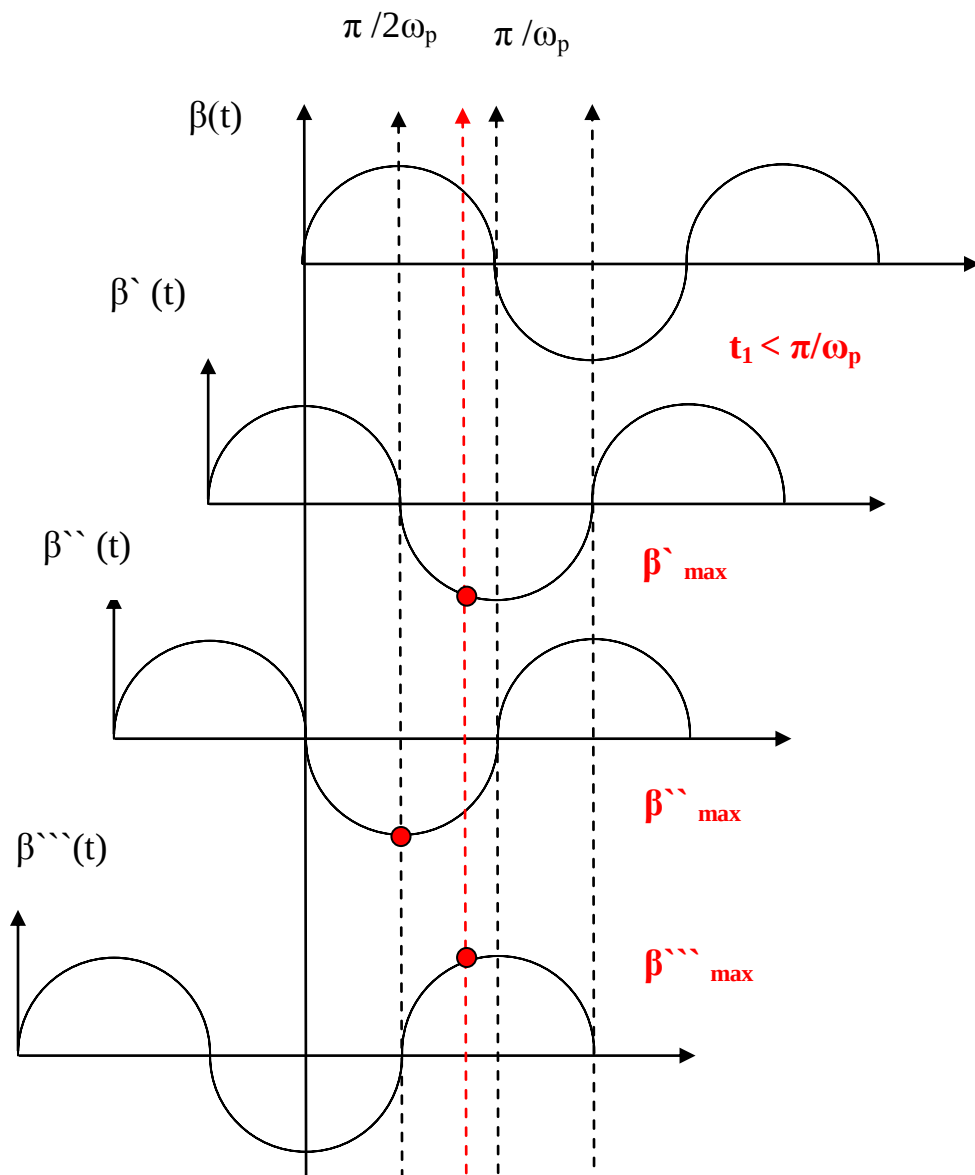
$$1 - (\beta''_{\max}^2 / \beta'''_{\max}) / \beta'_{\max} > 0$$

или

$$\beta'''_{\max} \beta'_{\max} / \beta''_{\max}^2 > 1.$$

Последнее соотношение определяет границы применимости задания входного сигнала первого вида. Если это не так, входной сигнал задают в виде отрезка синусоиды $\beta(t) = \beta_a \sin \omega_p t$ на отрезке времени, $\pi/2 \leq \beta(t) < \pi$. Правая граница этого отрезка устанавливается специальными соотношениями (см. ниже).

В этом, втором случае, процессы текут непрерывно, а поведение системы рассматривается только на указанном отрезке времени.



Справедливы следующие соотношения

$$\beta(t) = \beta_a \sin \omega_p t$$

$$\beta'(t) = \beta_a \omega_p \cos \omega_p t$$

$$\beta''(t) = -\beta_a \omega_p^2 \sin \omega_p t$$

$$\beta'''(t) = -\beta_a \omega_p^3 \cos \omega_p t$$

Из них следует, что

$$\beta'_{\max} = \beta_a \omega_p \cos \omega_p t_1$$

$$\beta''_{\max} = \beta_a \omega_p^2$$

$$\beta'''_{\max} = \beta_a \omega_p^3 \cos \omega_p t_1$$

Из первого и третьего соотношений следует, что

$$\omega_p^2 = \beta'''_{\max} / \beta'_{\max}$$

С учетом полученного соотношения из второго следует, что

$$\beta_a = \beta''_{\max} / \omega_p^2 = \beta''_{\max} \beta'_{\max} / \beta'''_{\max}$$

Для расчета t_1 перемножим первое и третье соотношения и поделим на второе в квадрате:

$$\cos \omega_p t_1 = \beta_a \omega_p \cos \omega_p t_1 \beta_a \omega_p^3 \cos \omega_p t_1 / \beta_a \omega_p^2 = (\beta'_{\max} \beta'''_{\max}) / \beta''_{\max}^2$$

В ряде случаев высшая производная может не быть задана явно. В этом случае исходят из следующего.

График участка разгона по скорости аппроксимируют гладкой непрерывно дифференцируемой функцией так, чтобы достигалась заданная (максимальная) скорость за указанный интервал времени разгона (торможения). Удобно эти участки задавать отрезками синусоид.

На участке разгона

$$q'(t) = q'_{\max k} / 2 (1 - \cos \omega_s t).$$

При этом $\omega_s t_s = \pi$,

(t_s – время разгона).

Тогда

$$\omega_s = \pi / t_s.$$

$$q''(t) = q'_{\max k} \omega_s / 2 \sin \omega_s t$$

$$q''_{\max} = q'_{\max k} \omega_s / 2$$

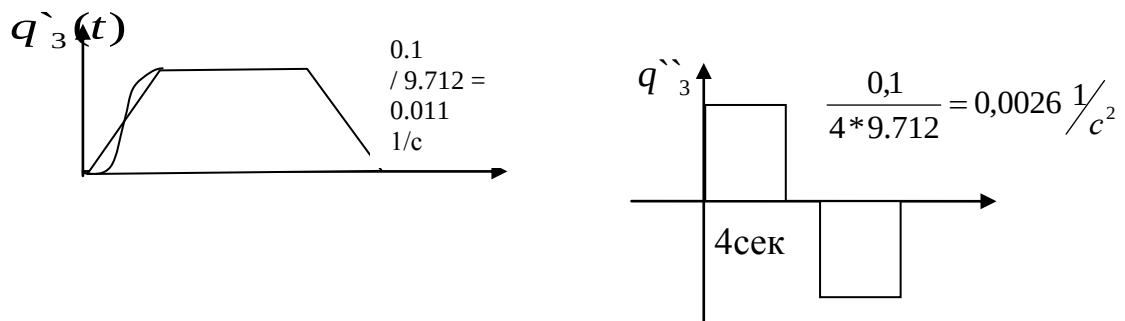
$$q'''(t) = q'_{\max k} \omega_s^2 / 2 \cos \omega_s t$$

$$q'''_{\max} = q'_{\max k} \omega_s^2 / 2.$$

Отметим, что при «синусном» разгоне $\beta''_{\max}$ больше, чем при разгоне по линейному закону. Видно из геометрических построений.

Пример.

Определить параметры эквивалентной синусоиды для обеспечения заданных параметров закона движения привода ... ERA.



Учли длину звеньев привода локтя (9.712 м).

$$\omega_s = \pi / t_s = \pi / 4 = 0.785 \text{ 1/c}, (// f = 0.785 / 6.28 = 0.125, T = 8 - \text{верно} //).$$

$q''_{\max} = q'_{\max} \cdot \omega_s / 2 = 0.011 \cdot 0.785 / 2 = 0.0043 \text{ 1/c}^2$ (> 0.0026 по линейному закону !),

$q'''_{\max} = q'_{\max} \cdot \omega_s^2 / 2 = 0.011 \cdot 0.785^2 / 2 = 0.0034 \text{ 1/c}^3$ ($> 0.0026 \text{ 1/c}^2$ по линейному закону скорости).

Рассчитаем параметры эквивалентной синусоиды.

Проверим условие

$$q'''_{\max} q'_{\max} / q''_{\max}^2 > 1.$$

$$(q'''_{\max} = 0.0034) \cdot (q'_{\max} = 0.011) / (q''_{\max} = 0.0043)^2 = 2.02 > 1$$

Поэтому эквивалентную синусоиду можно задать в первом виде ($\beta = q$).

$$\omega_p = \beta'''_{\max} / \beta''_{\max} = 0.0034 / 0.0043 = 0.785 \text{ 1/c} \quad (= \omega_s)$$

$$\beta_a = \beta'''_{\max}^3 / \beta'''_{\max}^2 = 0.0043^3 / 0.0034^2 = 0.0069$$

$$\beta_0 = \beta'_{\max} - \beta_a \omega_p = 0.011 - 0.785 \cdot 0.0069 = 0.011 - 0.0054 = 0.0056 \text{ 1/c}.$$

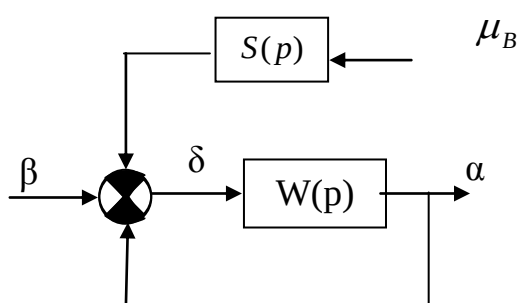
$$// \beta'_{\max} - \beta_a \omega_p = \beta'_{\max} - (\beta''_{\max}^3 / \beta'''_{\max}) > 0$$

$$// 0.011 - 0.0043^2 / 0.0034 = 0.011 - 0.0043^2 / 0.0034 = 0.011 - 0.0054 > 0$$

ОШИБКИ (ПОГРЕШНОСТИ) СП ПРИ ВОСПРОИЗВЕДЕНИИ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ И ПРИ НАЛИЧИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

Цель динамического синтеза – найти структуру и параметры коррекции, такие, чтобы СП с неизменяемой частью ... обеспечивал удовлетворение требований ИД (точность, переходные процессы, фильтрующие свойства). Вначале сосредоточим внимание на вопросах точности.

В общем виде структуру замкнутого скорректированного СП можно представить в виде



Здесь – передаточная функция разомкнутого скорректированного СП по отношению ко входному воздействию,

$S(p)$ – приведенная ко входу передаточная функция СП по возмущению.

Справедливы следующие соотношения

$$\alpha(t) = W(p)(\beta(t) - \alpha(t) - S(p)\mu_B(t))$$

видоизменим запись:

$$\beta(t) - (\beta(t) - \alpha(t)) = W(p)(\beta(t) - \alpha(t) - S(p)\mu_B(t))$$

Обозначим $\delta(t) = \beta(t) - \alpha(t)$ – погрешность слежения.

Тогда

$$\beta(t) - \delta(t) = W(p)(\delta(t) - S(p)\mu_B(t))$$

$$\delta(t) = (W(p)+1)^{-1} \beta(t) - (W(p)+1)^{-1} W(p) S(p) \mu_B(t).$$

Если

$|W(p)| \gg 1$, то

$$\delta(t) \approx W(p)^{-1} \beta(t) + S(p)\mu_B(t)$$

Для систем, имеющих в разомкнутом состоянии первый порядок астатизма при воздействии вида

$$\beta(t) = \beta_0 t + \beta_a \sin \omega_p t$$

погрешность слежения

$$\delta(t) \approx \beta_0 / \mu_c + W(j\omega_p)^{-1} \beta_a \sin(\omega_p t + \psi) + S(p) \mu_v(t).$$

μ_c – добротность СП по скорости (коэффициент усиления разомкнутой системы)

ψ – сдвиг по фазе ЧХ $W(j\omega_p)$ на рабочей частоте.

$\delta_{ск}(t) = \beta_0 / \mu_c$ - скоростная составляющая ошибки

$\delta_a(t) = W(j\omega_p)^{-1} \beta_a$ - амплитуда гармонической составляющей ошибки воспроизведения входного сигнала.

Если возмущающий момент – постоянная величина, то

$$\delta(t) \approx \frac{\beta_0}{\mu} + \frac{\beta_a}{W(j\omega_p)} * \sin(\omega_p * t + \psi) + \frac{m}{\mu} * \mu_v;$$

Для системы второго порядка астатизма скоростная ошибка равна 0 (!??)

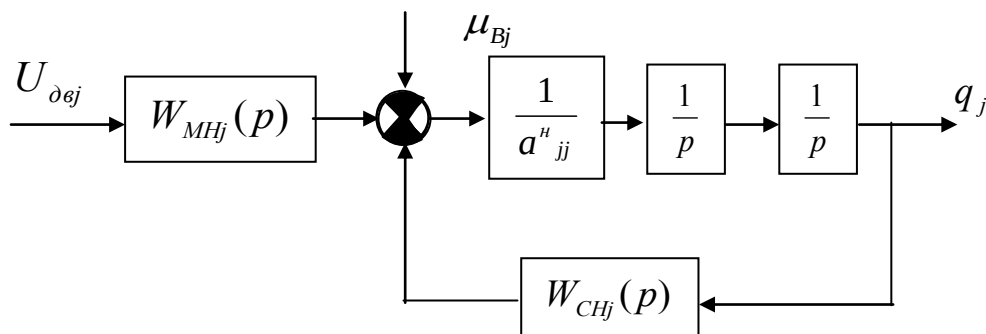
// $\beta_0 = 0.0056 \text{ 1/с} = 0.38 \text{ град/с}$

// $\beta_a = 0.0069 = 0.395 \text{ град.}$

// $\omega_p = 0.785 \text{ 1/с}$

ДИНАМИЧЕСКАЯ КОРРЕКЦИЯ СП

Выше мы определили структуру неизменяемой части СП ИСУ



И получили уравнения для расчета неизменяемой части СП:

$$W_{Hj}(p) = \frac{W_{MHj}(p)}{a'_{jj} * p^2 + W_{CHj}(p)} - \text{п.ф. неизменяемой части привода (по}$$

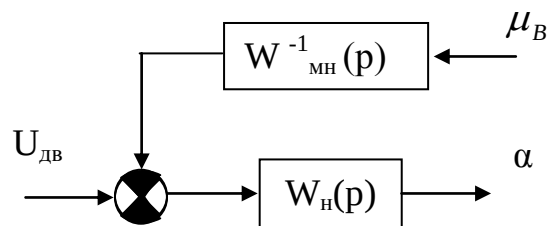
отношению к упр. воздействию).

$$W_{HBj}(p) = \frac{1}{a'_{jj} * p^2 + W_{CHj}(p)} - \text{п.ф. НЧ СП по отношению к возмущению (по}$$

моменту).

$$\left\{ \begin{array}{l} W_{Hj}^{-1}(p) = \frac{a'_{jj} * p^2 + W_{CHj}(p)}{W_{MHj}(p)} \\ W_{HBj}^{-1}(p) = a'_{jj} * p^2 + W_{CHj}(p) \end{array} \right\} - \text{обр. п.ф. НЧ СП по отношению к}$$

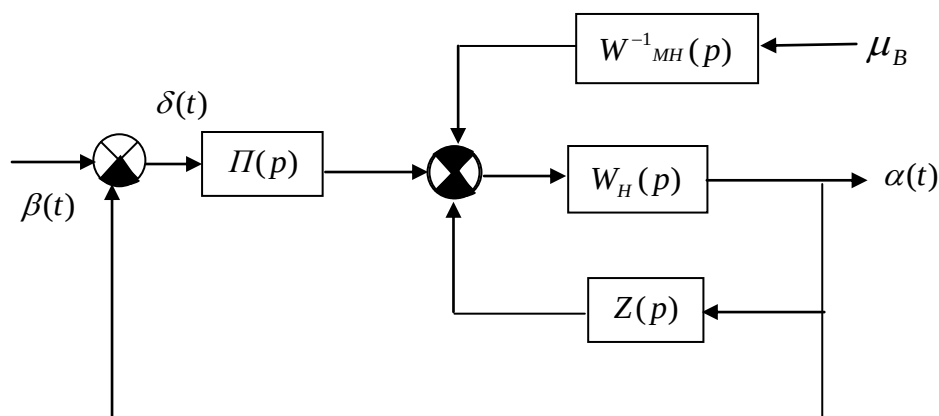
управляющему воздействию и возмущению.



Задача динамического синтеза – выбор структуры и параметров КУ, обеспечивающих заданные требования по точности, качеству переходных процессов и фильтрующим свойствам.

Для коррекции используют связи по ошибке слежения, по выходной координате, а также связи по производным управляющего воздействия.

Типовая структура замкнутого скорректированного СП (без форсирующих связей) имеет вид



Конкретную структуру и параметры корректирующих устройств или алгоритмов позволяет определить методика динамического синтеза на основе обратных ЛАЧХ.

Вкратце, процедура динамического синтеза состоит в следующем.

Обратная передаточная функция системы записывается в двух слагаемых. Первое из них учитывает свойства НЧ и ПКУ, второе – свойства ПКУ и ПрКУ:

$$W^{-1}(p) = \frac{1}{\Pi(p)W_H(p)} + \frac{Z(p)}{\Pi(p)}.$$

Приведенная ко входу СП передаточная функция возмущения

$$S(p) = W^{-1}_{MH}(p) \Pi^{-1}(p)$$

Задаемся распределением суммарной ошибки между ее скоростной, гармонической и моментной составляющими.

$$\delta_{\Sigma} = \delta_{\text{СК}} + \delta_a + \delta_m$$

Далее выбором коэффициента усиления системы добиваемся, чтобы обеспечивалось выполнение условий по всем составляющим.

В предположении, что в низкочастотной области и в рабочем диапазоне частот ($0 < \omega < \omega_p$)

$$|W(j\omega_p)| \gg 1$$

и

$$\frac{1}{\Pi(j\omega)W_H(j\omega)} > \frac{Z(j\omega)}{\Pi(j\omega)}.$$

выбирается коэффициент усиления разомкнутой системы как наибольший из необходимых для обеспечения всех составляющих.

При этом скоростная составляющая ошибки составит

$$\delta_{\text{СК}} = \frac{\beta_0}{\mu_c}$$

Моментная составляющая ошибки (постоянный момент !!!)

$$\delta_m = (m_g / \mu_c) \mu_B.$$

Здесь m_g / μ_c - коэффициент передачи возмущающего момента, приведенный к входу СП.

Гармоническая составляющая –

$$\delta_a = \beta_a \frac{1}{|P(j\omega_p)W_H(j\omega_p)|}$$

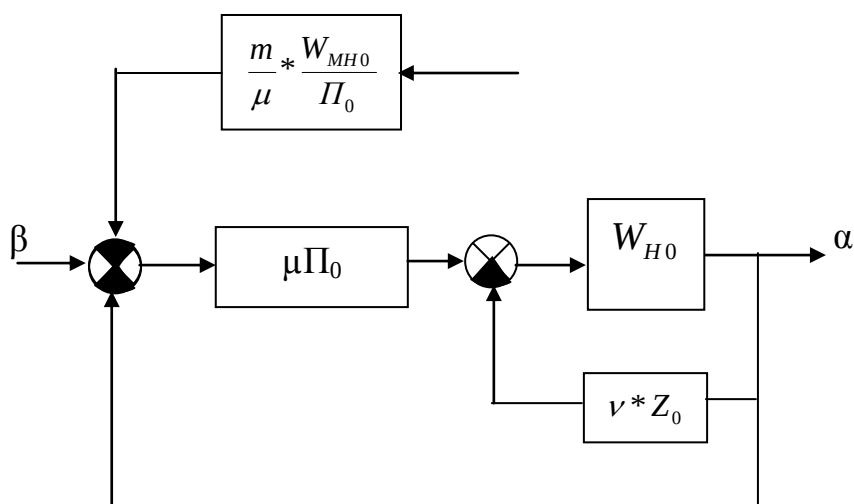
Соотношения вытекают из выражения для расчета ошибки

$$\delta(t) = (W(p)+1)^{-1} \beta(t) + (W(p)+1)^{-1} W(p) S(p) \mu_B(t).$$

Далее, манипулируя асимптотическими ЛАЧХ двух слагаемых, соответствующих обратной ПФ, обеспечивают требуемое качество переходных процессов (частота среза и т.д.) и требуемые фильтрующие свойства (ВЧ область), как, например на нижеследующих рисунках.

При этом передаточные функции неизменяемой части, цепей последовательной и параллельной коррекции, рассматривают при единичных значениях коэффициентов усиления.

При этом структура скорректированного СП принимает вид



Уравнение скорректированного СП - вид

$$W^{-1} = \frac{1}{\mu * \Pi_0 * W_{H0}} + \frac{\nu * Z_0}{\mu * \Pi_0}.$$

ψ – сдвиг по фазе выходного сигнала;

Задаются распределением суммарной ошибки между отдельными составляющими:

$$\delta = \underbrace{\delta_{ск}}_{\text{скорости}} + \overset{\text{гармон}}{\delta_z} + \underbrace{\delta_M}_{\text{моменты}} ;$$

$$\delta_z = 0,6\delta;$$

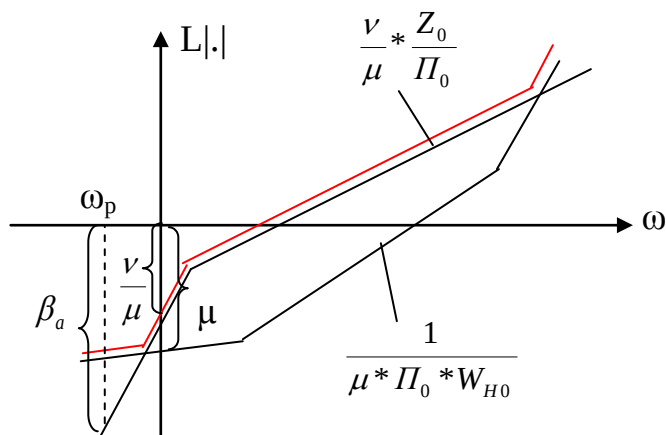
$$\delta_{ск} = \delta_M = 0,2\delta;$$

$$\frac{\beta_0}{\mu} = 0,2\delta;$$

$$\mu = 5 * \frac{\beta_0}{\delta};$$

$$\frac{m}{\mu} * M_B = 0,2\delta;$$

$$\mu = 5 * \frac{m * M_B}{\delta}.$$

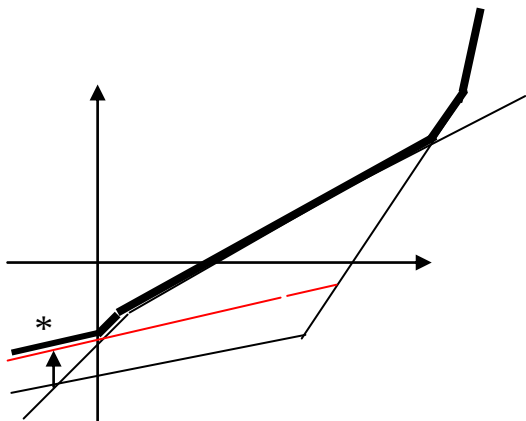


_____ должна соответствовать желаемой.

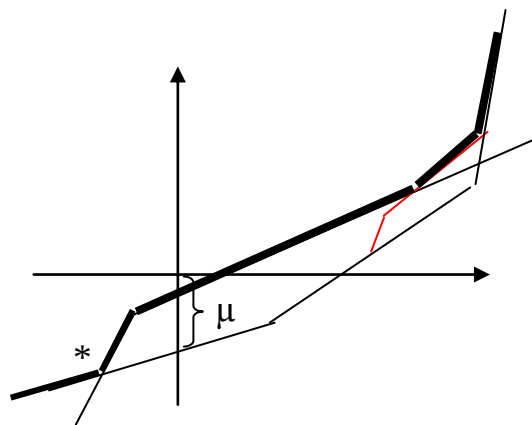
$$W^{-1} = \frac{1}{\mu * \Pi_0 * W_{H0}} + \frac{\nu}{\mu} * \frac{Z_0}{\Pi_0}.$$

Очевидно, сложению передаточных функций соответствует операция савнения их ЛАЧХ.

Избыток усиления в рабочей области устраняется введением последовательного корректирующего устройства дифференцирующего типа. Избыток в ВЧ области – введением КУ интегрирующего типа. (См. рис. ниже).



Дифференцирующее КУ



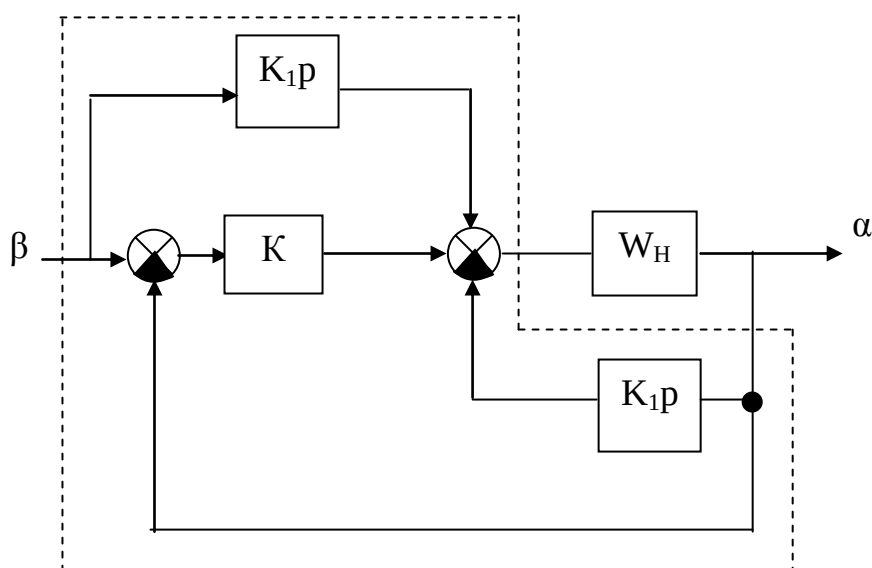
Интегрирующее КУ

При образовании замкнутого внутреннего контура необходимо проверить его устойчивость.

Очевидно, передаточная функция внутреннего контура может быть получена делением второго слагаемого на первое (вычитанием ЛАЧХ первого слагаемого из ЛАЧХ второго слагаемого).

Динамика СП С ДВУМЯ ДАТЧИКАМИ СКОРОСТИ

В упрощенном виде структурную схему такого СП можно представить в виде, показанном на следующем рисунке



Уравнение динамики такой системы в операторной форме имеет вид

$$\alpha = W_H(k + k_1 p)\beta - W_H(k + k_1 p)\alpha$$

После преобразования получим

$$((k + k_1 * p) * W_H + 1) * \alpha = W_H (k + k_1 * p) \beta;$$

$$\Phi^{-1} = 1 + \frac{1}{W_H (k + k_1 * p)};$$

Передаточная функция эквивалентной разомкнутой системы

$$W^{-1} = \Phi^{-1} - 1 = \frac{1}{W_H (k + k_1 * p)};$$

или

$$W^{-1} = \frac{1}{W_H * k (1 + \frac{k_1}{k} * p)};$$

Уравнение динамики этой же системы без форсирующей связи

$$(1 + W_H (k + k_1 * p)) \alpha = W_H * k * \beta;$$

Передаточная функция системы без форсирующей связи

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{W_H * k} + 1 + \frac{k_1}{k} * p;$$

В разомкнутом состоянии

$$W_{\text{бфс}}^{-1} = \frac{1}{W_H * k} + \frac{k_1}{k} * p.$$

Если обозначить

$$\frac{k_1}{k} = T;$$

передаточные функции можно переписать в виде

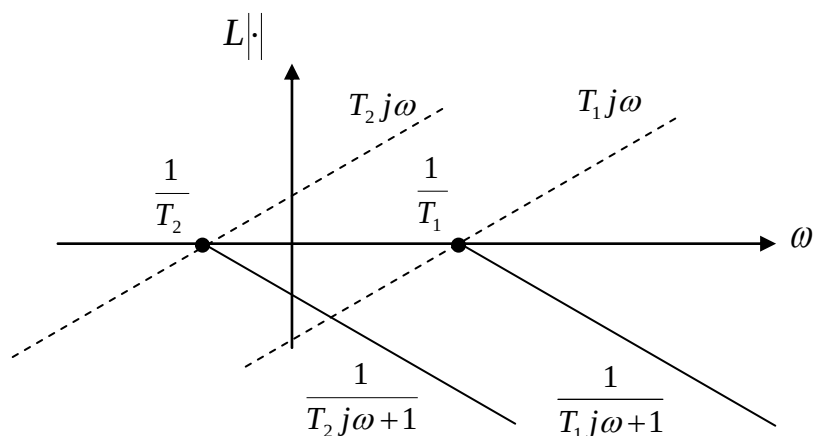
$$W^{-1} = \frac{1}{W_H k (1 + T * p)} \text{ - с форсирующей связью}$$

$$W_{\text{бфс}}^{-1} = \frac{1}{W_H k} + T p \text{ - без форсирующей связи.}$$

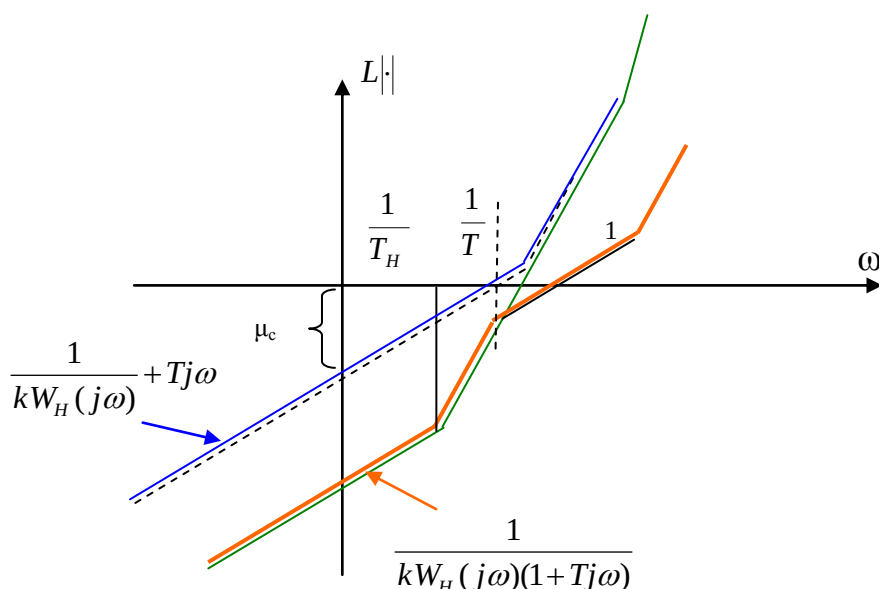
Эти передаточные функции содержат одинаковые параметры, но различаются по структуре.

В первом случае неизменяемая часть умножается на апериодическим звеном $\frac{1}{(1 + T * p)}$, а во втором – складывается с дифференцирующим звеном $T p$.

ЛАЧХ обоих звеньев пересекаются в одной точке, но имеют разный вид. На рис. показан вид ЛАЧХ этих звеньев при различных значениях T .



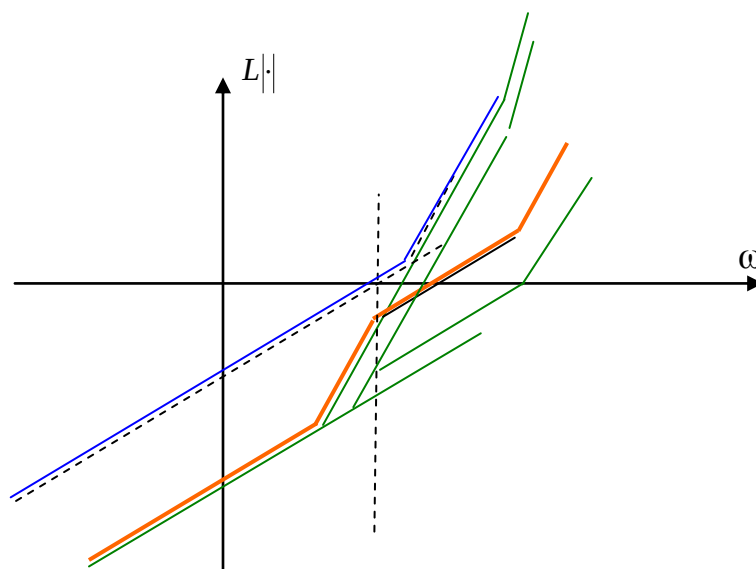
В этой связи вид ЛАЧХ скорректированных СП также существенно различается.



Видно, что введение форсирующей связи эквивалентно повышению коэффициента усиления системы, что благоприятно сказывается на повышении точности, особенно при обработке входных воздействий. Формально – это повышение k -та усиления системы (по входному воздействию). Фактический k -т усиления контура ОС СП остается без изменения! Это облегчает задачу обеспечения устойчивости, особенно с учетом изменения величины инерционной составляющей нагрузки привода (см. рисунок). Аналогичная система с последовательным КУ дифференцирующего типа может иметь существенно более

низкие запасы устойчивости. Кроме того, эта связь потребует дифференцирования сигнала ошибки, а он с помехами. В первом случае дифференцирует только управляющий сигнал, формируемый ТСУ. Он формируется алгоритмически без измерения физических переменных.

Отметим, что ЛАЧХ $\frac{1}{kW_H(j\omega)(1+Tj\omega)}$ получена в результате обратных преобразований ПФ замкнутой системы. Судить о качестве динамических процессов нужно, рассматривая ЛАЧХ $\frac{1}{kW_H(j\omega)} + Tj\omega$ (форсирующая связь не влияет на собственные свойства системы !!!).



ПРИМЕР.

Выполнить динамический синтез привода наклона локтя КМР ERA.

Исходные данные на проектирование.

Закон изменения скорости ЗУМ – трапецеидальный, параметры рассмотрены выше.

Момент от действия внешних сил отсутствует.

Неизменяемая часть – см. выше.

$$W^{-1}_H = a'_{33} R / (iK_M) = 2202.5 * 0.025 = 55.06 \text{ p}^2 / \text{размерность ???/}$$

$$+ i_j * K_{\omega j} = 450 * 0.531 = 239 \text{ p.}$$

Параметры эквивалентного входного сигнала

$$// \beta'_0 = 0.0056 \text{ 1/c} = 0.38 \text{ град/c}$$

$$// \beta_a = 0.0069 = 0.395 \text{ град.}$$

$$// \omega_p = 0.785 \text{ 1/c}$$

Оценим значения координат рабочей точки.

При синтезе задаются распределением составляющих ошибки

Будем считать, что это распределение – поровну между скоростной и гармонической составляющими. Тогда

$$\delta_\Sigma = \delta_{\text{ск}} + \delta_a.$$

$$\delta_a = \delta_{\text{ск}} = \delta_\Sigma / 2.$$

Ординату рабочей точки найдем из соотношения

$$(W(j\omega_p) + 1)^{-1} \beta_a < \delta_\Sigma / 2.$$

Получим

$$|W(j\omega_p)|^{-1} < \delta_\Sigma / 2\beta_a$$

Если $\delta_\Sigma = 0.0395$ град, - уточнить в ERA !!!

$$\text{То } \delta_\Sigma / 2\beta_a = 0.05$$

Ордината рабочей точки

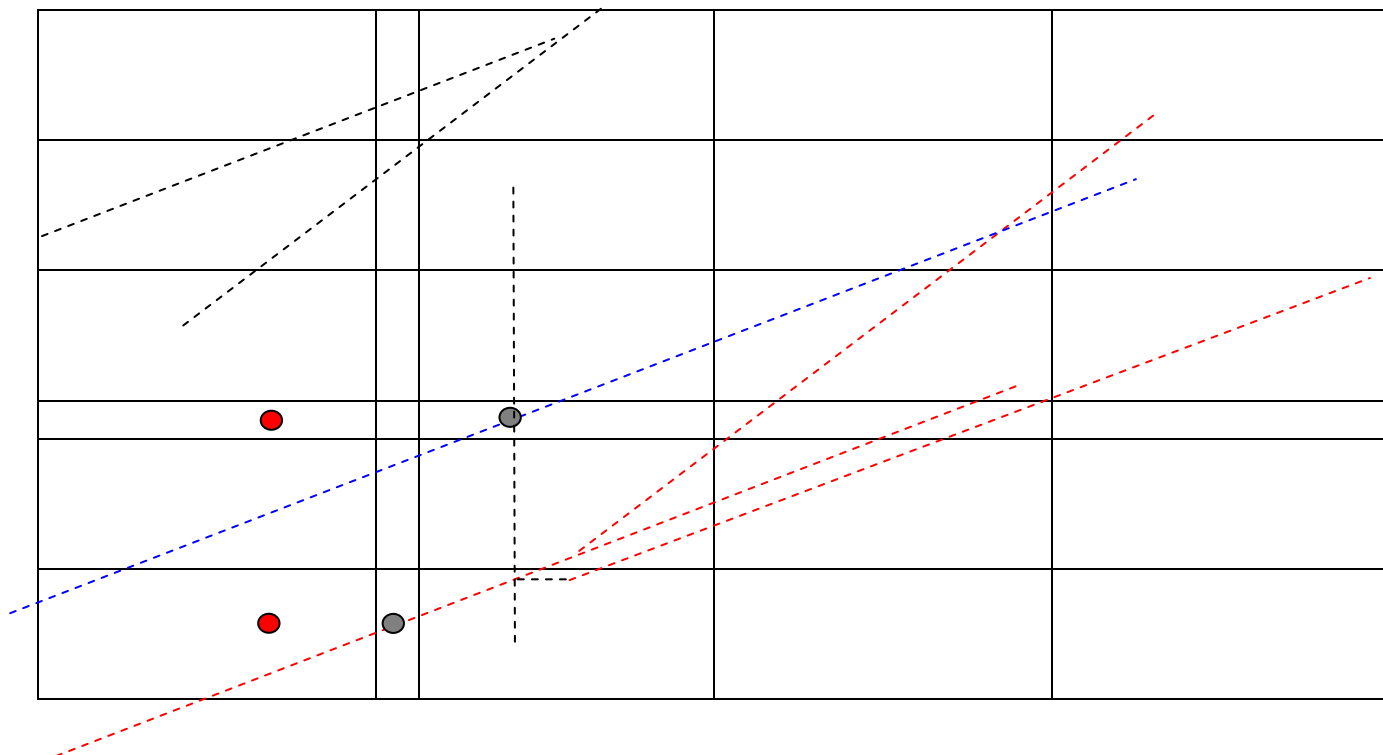
$$|W(j\omega_p)|^{-1} < 0.05.$$

Для обеспечения этого соотношения необходимо, чтобы $W(j\omega_p) \gg 1$.

$$\text{Тогда ордината рабочей точки } |W(j\omega_p)|^{-1} = 0.05.$$

Требуемый коэффициент усиления для компенсации скоростной составляющей ошибки

$$\mu_c = \frac{\beta_0}{\delta_{\Sigma}} = \frac{2\beta_0}{\delta_{\Sigma}} = 0.38 \cdot 2 / 0.0395 = 19.2. \quad 1/\mu_c = 0.052$$



Постоянную времени T выбираем равной $\frac{1}{2}$ (тогда $1/T = 2$). С учетом этого к-т усиления контура ГОС (разомкнутая система) равен 2.

$$W^{-1}_H = a'_{33} R / (iK_M) = 2202.5 \cdot 0.025 = 55.06 p^2$$

$$+ /i_j * K_{\omega j} = 450 * 0.531 = 239 p / = 239 p (55.06/239p + 1) =$$

$$239 p (0.23 p + 1) .$$

$$W_H = (1 / 239) / (p (0.23 p + 1)) = 0.042 / (p (0.23 p + 1)).$$

Постоянная времени (коэффициент усиления КУ): $K_{\text{ку}} * K_{\text{нч}} = 19.2 = K_{\text{ку}} * 1/239$.

$$K_{\text{ку}} = 19.2 * 239 = 4588.8 \text{ в/град.}$$

Нужно иметь в виду, что при расчете моментной ошибки у данной системы нужно принимать в рассмотрение меньший коэффициент !?

ДИНАМИКА ИСУ МР С УЧЕТОМ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ СП

Уравнение неизменяемой части одного привода:

$$a''_{jj} * p^2 * q_j = W_{MHj}(p) * U_{\partial ej} - W_{CHj}(p) * q_j - \mu_{Bj}.$$

Это уравнение нужно дополнить членами, учитывающими взаимодействие приводов:

$$a''_{jj} * p^2 * q_j = W_{MHj}(p) * U_{\partial ej} - W_{CHj}(p) * q_j - \mu_{Bj} - \mu_{\partial B3j}.$$

При этом $\mu_{\partial B3j}$ содержит исключенные ранее из рассмотрения

$$\mu_{\partial B3j} = b_j - \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq i}}^n a_{jk} q''_k.$$

На самом деле эти слагаемые присутствуют. Наша задача теперь – установить степень их влияния на полученные ранее результаты (без учета оных).

Наше внимание будет обращено только на одну компоненту - $\sum a_{jk} q''_k$. Трудно оценить все (при расчете). Потом проверим моделированием. Опыт показывает, что этого, в большинстве случаев, достаточно.

После приведения подобных членов в последнем уравнении получим:

$$(a''_{jj} * p^2 + W_{CHj}(p)) * q_j = W_{MHj}(p) * U_{\partial ej} - (\mu_{Bj} + \mu_{\partial B3j}).$$

Уравнение закона движения и коррекции:

$$U_{\partial ej} = \Pi_j(p) * (p_j^* - \beta_j * q_j) - Z_j(p) * q_j;$$

$$\beta_j = \begin{cases} 1 & \text{при рассмотрении зафиксированного привода} \\ \emptyset & \text{при рассмотрении разомкнутого привода} \end{cases}$$

$$(a''_{jj} * p^2 + W_{CHj}(p)) * q_j = W_{MHj} \{ \Pi_j(p) (q_j^* - \beta_j * q_j) - Z_j(p) * q_j \} - (\mu_{Bj} + \mu_{\partial B3j}) *$$

Обозначим

$$W_{Mj} = W_{MHj} \{ \Pi_j(p) \}$$

$$W_{Cj}(p) = W_{CHj}(p) + W_{Mj} \{ Z_j(p) \}$$

Перепишем *) в более компактной форме

$$(a''_{jj} * p^2 + W_{Mj} * \beta_j + W_{Cj}) * q_j = W_{Mj} * q_j^* - (\mu_{Bj} + \mu_{\partial 63j}); \quad **)$$

Если обозначить

$$W_j(p) = \frac{W_{Mj}(p)}{a'_{jj} * p^2 + W_{Mj} * \beta_j + W_{Cj}} - \text{п.ф. } j\text{-го СП по отношению к выходному}$$

упр. воздействию;

$$W_{Bj}(p) = \frac{1}{a'_{jj} * p^2 + W_{Mj} * \beta_j + W_{Cj}} - \text{п.ф. } j\text{-го СП по отношению к внешнему}$$

моменту;

$$q_j = W_j(p) q_j^* - W_{Bj}(\mu_{Bj} + \mu_{\partial 63j});$$

$$W_j^{-1}(p) = \frac{a'_{jj} * p^2 + W_{Mj} * \beta_j + W_{Cj}}{W_{Mj}} \quad (3) - \text{обр. п.ф. } j\text{-го СП по отношению к}$$

вх. упр. воздействию. Или в виде трех слагаемых:

$$W_j^{-1}(p) = \frac{a'_{jj} * p^2}{W_{Mj}} + \frac{W_{Cj}}{W_{Mj}} + \beta_j$$

В дальнейшем мы не будем вводить специальные обозначения для записи ПФ СП в замкнутом и разомкнутом состояниях, поскольку для перехода от одного вида ПФ к другому достаточно придать β_j соответствующее значение.

МАТРИЧНЫЕ ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ИСУ МР

Вспомним, что

$$\mu_{\partial 63j} = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n a_{jk} p^2 q_k$$

Тогда к каждому из j уравнений **) следует прибавить соответствующие полиномы от p второй степени:

$$a''_{11} p^2 q_1 = W_{M1}(q_1^* - \beta_1 q_1) - W_{C1} q_1 - a_{12} p^2 q_2 - a_{13} p^2 q_3 - \dots - a_{1n} p^2 q_n$$

...

$$a''_{jj} p^2 q_j = W_{Mj}(q_j^* - \beta_j q_j) - W_{Cj} q_j - a_{j1} p^2 q_1 - a_{j2} p^2 q_2 - \dots - a_{jn} p^2 q_n$$

...

$$a''_{nn}p^2q_n = W_{Mn}(q_n^* - \beta_n q_n) - W_{Cn}q_n - a_{n1}p^2q_1 - a_{n2}p^2q_2 - \dots - a_{nn-1}p^2q_{n-1}$$

Удобно все слагаемые, содержащие элементы $a_{ij}p^2q_j$ перенести в левую часть

$$a''_{11}p^2q_1 + a_{12}p^2q_2 + a_{13}p^2q_3 + \dots + a_{1n}p^2q_n = W_{M1}(q_1^* - \beta_1 q_1) - W_{C1}q_1q_n$$

...

$$a_{j1}p^2q_1 + a_{j2}p^2q_2 + \dots + a''_{jj}p^2q_j + \dots + a_{jn}p^2q_n = W_{Mj}(q_j^* - \beta_j q_j) - W_{Cj}q_j$$

...

$$a_{n1}p^2q_1 + a_{n2}p^2q_2 + \dots + a_{nn-1}p^2q_{n-1} + a''_{nn}p^2q_n = W_{Mn}(q_n^* - \beta_n q_n) - W_{Cn}q_n.$$

Последнюю систему уравнений удобно представить в матричной форме записи. Для этого введем следующие матричные передаточные функции

$$A'' = A + \text{diag}[i_1^2 * I_{\partial 1} \quad i_2^2 * I_{\partial 2} \quad \dots \quad i_n^2 * I_{\partial n}];$$

$$W_M = \text{diag}[W_{M1} \quad W_{M2} \quad \dots \quad W_{Mn}];$$

$$W_c = \text{diag}[W_{C1} \quad W_{C2} \quad \dots \quad W_{Cn}].$$

Тогда

$$A'' p^2 q = W_M(p)(q^* - \beta q) - W_c(p)q - \mu_B \quad (***)$$

здесь

$$\beta = \text{diag}[\beta_1 \quad \beta_2 \quad \dots \quad \beta_n];$$

$$q = [q_1 \quad q_2 \quad \dots \quad q_n]^T;$$

$$q^* = [q_1^* \quad q_2^* \quad \dots \quad q_n^*]^T;$$

$$\mu_B = [\mu_{B1} \quad \mu_{B2} \quad \dots \quad \mu_{Bn}]^T$$

В частном случае, при $n = 2$ можно записать

$$\begin{bmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a'_{22} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} p^2 q_1 \\ p^2 q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{M1}\beta_1 & 0 \\ 0 & W_{M2}\beta_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} W_{C1} & 0 \\ 0 & W_{C2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mu_{B1} \\ \mu_{B2} \end{bmatrix}$$

Если б в A'' не было диагональных элементов, то уравнения не были бы взаимосвязаны, недиагональные элементы обусловлены взаимовлиянием.

Уравнение ***) представим в виде соотношений «вход-выход».

Сгруппируем подобные члены; получим:

$$(A'' p^2 + W_M \beta + W_C) q = W_M q^* - \mu_B.$$

Разрешим уравнение относительно вектора выходных координат:

$$q = W^* q^* - W_B^* \mu_B,$$

где

$W = (A'' p^2 + W_M \beta + W_C)^{-1} * W_M$ (') – матричная п.ф. системы СП по отношению к вектору вх. упр. воздействия.

$W_B = (A'' p^2 + W_M \beta + W_C)^{-1}$ (") – матричная п.ф. системы СП по отношению к вектору внешнего воздействия.

$W^{-1} = W_M^{-1} * (A'' p^2 + W_M \beta + W_C)$ (""') – обратная матрица п.ф. по отношению к вектору вх. упр. воздействию.

Запишем в развернутом виде выражения для «прямой» и «обратной» матричных передаточных функций системы приводов ИСУ.

$$W^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a''_{11} p^2 + W_{M1} \beta_1 + W_{C1}}{W_{M1}} & \frac{a_{12}}{W_{M1}} & \dots & \frac{a_{1n}}{W_{M1}} \\ \frac{a_{21}}{W_{M2}} & \frac{a''_{22} p^2 + W_{M2} \beta_2 + W_{C2}}{W_{M2}} & \dots & \frac{a_{2n}}{W_{M2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{W_{Mn}} & \frac{a_{n2}}{W_{Mn}} & \dots & \frac{a''_{nn} p^2 + W_{Mn} \beta_n + W_{Cn}}{W_{Mn}} \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} a_{11}^H p^2 + W_{M1} \beta_1 + W_{C1} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}^H p^2 + W_{M2} \beta_2 + W_{C2} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}^H p^2 + W_{Mn} \beta_n + W_{Cn} \end{bmatrix}^{-1} *$$

$$* \begin{bmatrix} W_{M1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{M2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & W_{Mn} \end{bmatrix}.$$

Можно видеть, что диагональные элементы обратной матричной передаточной ПФ равны обратным ПФ соответствующих ОВП.

Если для обратной МПФ ввести обозначение

$$W^{-1} \equiv \hat{W} = [\hat{W}_{ij}]$$

то можно записать

$$\hat{W}_{jj} = W_j^{-1}.$$

Равенство обратных значений ПФ ОВП и соответствующих диагональных элементов обратной матричной ПФ СП ИСУ служит дополнительным доводом к использованию при синтезе и анализе СП МР на этапе проектирования ИСУ обратных ПФ.

Однако, в реальности процессы, естественно, описываются прямыми матрицами, а не обратными, т.е. W^{-1} необходимо «обернуть». Обращению подлежит недиагональная матрица. Поэтому диагональные элементы обращенной матрицы не будут совпадать с обратными значениями диагональных элементов обратной матрицы. Другими словами, а это следует и из последних соотношений,

$$W_{jj} \neq \hat{W}_{jj}^{-1}.$$

Поэтому

$$W_{jj} \neq W_j.$$

Таким образом, свойства ОВП (W_j) при их работе в составе ИСУ МР (W_{jj}) в общем случае будут искажены.

Установим связь между «прямыми» передаточными функциями ОВП (W_j) и соответствующими диагональными элементами МФП ИСУ (это ПФ приводов с учетом взаимовлияния (W_{jj})).

СВЯЗЬ ПФ И ЧХ ОТДЕЛЬНО ВЗЯТЫХ СП И ПФ СП С УЧЕТОМ ВЗАИМОВЛИЯНИЯ

$$W_{jj}(p) = (?)W_j(p);$$

adj – алгебраическое дополнение.

Выражение для расчета ПФ j-го СП с учетом взаимовлияния получим по формуле обращения матриц:

$$W_{jj} = \frac{\text{adj}[A'' p^2 + W_M \beta + W_C]_{jj}}{\det[A'' p^2 + W_M \beta + W_C]} * W_{Mj};$$

Ранее мы записали ПФ ОВП:

$$W_j = \frac{W_{Mj}}{a''_{jj} p^2 + W_{Mj} \beta_j + W_{Cj}};$$

Составим отношение

$$\frac{W_{jj}}{W_j} = R_j;$$

Тогда

$$W_{jj} = R_j * W_j;$$

Таким образом, исследуя R_j , можем составить представление о искажении свойств ОВП.

Выражение для R_j имеет вид

$$R_j = \frac{\text{adj}[A'' p^2 + W_M \beta + W_C]_{jj}}{\det[A'' p^2 + W_M \beta + W_C]} * (a''_{jj} p^2 + W_{Mj} \beta_j + W_{Cj}).$$

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПРИВОДОВ ИСУ МР

Перейдем в частотную область

$$R_j(j\omega) = R(p) \Big|_{p=j\omega};$$

и рассмотрим асимптотические свойства функции $R_j(j\omega)$.

$$R_j(j\omega) = \frac{\text{adj}(-A^H \omega^2 + W_M(j\omega)\beta + W_C(j\omega))_{jj}}{\det(-A^H \omega^2 + W_M(j\omega)\beta + W_C(j\omega))} * (-a^H_{jj} \omega^2 + W_{Mj}\beta_j + W_{Cj}) \quad (8)$$

Матрицу β рассмотрим в виде $\beta = \tilde{\beta} = \text{diag}(1 \ 1 \ \dots \ 0 \ \dots \ 1)$ - это значит, среди всех приводов МР только один (рассматриваемый) разомкнут, а остальные - замкнуты.

Рассмотрим два случая:

а) НЧ область $\omega \rightarrow 0$,

б) ВЧ область $\omega \rightarrow \infty$.

а) если $\omega \rightarrow 0$, то в () $\omega^2 \rightarrow 0$ быстрее всех прочих слагаемых, тогда

$$R_j(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow 0} \approx \frac{\text{adj}(W_M(j\omega)\tilde{\beta} + W_C(j\omega))W_{Cj}(j\omega)}{\det(W_M(j\omega)\tilde{\beta} + W_C(j\omega))};$$

$$\det(W_M(j\omega)\tilde{\beta} + W_C(j\omega)) = \text{adj}(W_M(j\omega)\tilde{\beta} + W_C(j\omega))W_{Cj}(j\omega)$$

это можно сделать, потому что в $W_M(j\omega) * \tilde{\beta}$ элемента jj нет, поэтому при умножении на $W_C(j\omega)$ матрицы на диагонали будут произведения элементов на $W_C(j\omega)$, а вместо элемента jj - $W_C(j\omega)$, тогда $\det =$ произведению всех диагональных элементов алг. дополнения на $W_C(j\omega)$.

Получаем $R = 1$, т.е. в области НЧ свойства приводов искажены не будут взаимовлиянием.

б) если $\omega \rightarrow \infty$

$$R_j(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \approx \frac{\text{adj}[A^H]_{jj} * a^H_{jj}}{\det A^H}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{«-» не будет, т.к. размер матрицы } \det n \times n \\ \text{a } \text{adj} - (n-1) \times (n-1) \text{ и еще «-» от} \\ - a'_{jj} - \text{получается } \frac{-1^n}{-1^n} - \text{сокращаются} \end{array} \right\}$$

В силу того, что $A > 0$

$$\text{adj}[A']_{jj} * a'_{jj} \geq \det A', \text{ так как } A^T = A \text{ и } A \neq 0$$

$$R_j(j\omega) \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \geq 1;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} |W_{jj}(j\omega)| \geq |W_j(j\omega)| \\ \arg W_{jj}(j\omega) = \arg W_j(j\omega) \end{array} \right. \quad \text{при } \omega \rightarrow \infty$$

В области ВЧ всегда будут сдвинуты вверх по оси амплитуд.

Рисунок

Ухудшение фильтрующих свойств.

Главное, чтобы в НЧ области характеристики совпадали (в рабочей области частот); чтобы динамические влияния не начались в рабочей области частот.

Вывод: возможно и целесообразно вести проект по отдельным приводам, но затем нужно проверить, не оказались ли динамические влияния в рабочей области.

Вариант благополучного случая:

$$A' = A + i^2 * I.$$

Пусть $i \rightarrow \infty$ и $I \rightarrow \infty$

i – ПО редуктора,

I – момент инерции ротора,

тогда недиагональными элементами можно пренебречь $\Rightarrow$ динамические влияния $\rightarrow 0$.

Т.О. свойства многомерной системы не определяются частотными характеристиками отдельных каналов, поэтому нужно исследовать $\det H(p)$. Выводы и заключения, составленные на основе только рассмотрения свойств ОВП не являются корректными.

УСТОЙЧИВОСТЬ ИСУ МР

Мы убедились, что свойства ОВП будут изменены из-за появления динамического взаимовлияния.

Это вызвано тем, что фактически ИСУ – многомерная система. Исследовать устойчивость такой системы в общем случае нельзя, только рассматривая свойства ОВП. Нужно рассматривать ИСУ как единую многомерную систему.

Об устойчивости такой многомерной системы можно, также как и в одномерном случае, составить представление по характеру расположения на комплексной плоскости корней ее характеристического определителя. Для этого нужно составить операционную матрицу и вычислить ее определитель.

Составим операционную матрицу многомерной ИСУ. Для этого уравнение ***) разобьем на две части. Первая из них будет соответствовать закону формирования сил и моментов приводов, а вторая – закону движения ИМ под действием этих сил и моментов.

$$\begin{cases} \mu_M = W_M (q^* - \beta q) - W_c q \\ A^n p^2 q = \mu_M - \mu_B \end{cases}.$$

Матрицы W_M и W_c имеют диагональный вид (см. выше). Каждый из диагональных элементов – это передаточная функция, связывающая моментную точку соответствующего привода с сигналом рассогласования и с выходной координатой. ПФ – дробно-рациональные функции. Каждую из этих ПФ можно записать так

$$\left(W_{Mj} = \frac{M_{Mj}}{N_j} \right), \left(W_{cj} = \frac{M_{cj}}{N_j} \right),$$

где M_{Mj}, M_{Cj}, N_j – полиномы от p .

Тогда матричные ПФ W_m и W_c можно представить в виде

$$W_M = \text{diag}^{-1}(N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n) * \text{diag}(M_{M1} \ M_{M2} \ \dots \ M_{Mn});$$

$$W_C = \text{diag}^{-1}(N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n) * \text{diag}(M_{C1} \ M_{C2} \ \dots \ M_{Cn});$$

$\text{diag}^{-1}(\cdot)$ – обратная к $(\cdot)$ матрица;

Обозначим для краткости

$$\text{diag}(N_1 \ N_2 \ \dots \ N_n) = N;$$

$$\text{diag}(M_{M1} \ M_{M2} \ \dots \ M_{Mn}) = M_M;$$

$$\text{diag}(M_{C1} \ M_{C2} \ \dots \ M_{Cn}) = M_C;$$

Тогда МПФ:

$$W_M = N^{-1} * M_M$$

$$W_C = N^{-1} * M_C$$

и систему (***) можно представить в виде

$$\begin{cases} N * \mu_M = M_M * (q^* - \beta * q) \\ A^n * p^2 * q = \mu_M - \mu_B \end{cases} \quad (6)$$

Запишем (6) в виде одного матричного уравнения, применив блочные матрицы

$$\begin{bmatrix} N & : & M_M * \beta + M_C \\ \dots & : & \dots \\ E & : & A^n * p^2 * q \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \mu_M \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_M \\ 0 \end{bmatrix} * q^* - \begin{bmatrix} 0 \\ E \end{bmatrix} * \mu_B \quad (7)$$

Матрица слева и есть операционная матрица системы. Каждый ее элемент – полином от p .

$$H(p) = \begin{bmatrix} N(p) & : & M_M(p)\beta + M_C(p) \\ \dots & : & \dots \\ E & : & A^n p^2 \end{bmatrix}$$

$$H(p) = [2n \times 2n]$$

$\det H(p)$ (характеристический многочлен системы).

Характеристическое уравнений системы

$$\det H(p) = 0.$$

Система устойчива, если характеристическое уравнение не имеет корней в правой полуплоскости и на мнимой оси.

Нам нужно уметь решать эту задачу. Она не проста.

Оценим порядок характеристического уравнения. Если каждый привод до моментной точки описывается уравнением как минимум, 1-го порядка (без коррекции, без учета динамики механизмов передачи движения) + 2-й порядок ИМ. Всего $3 \cdot n$. Придется решить уравнение 18 порядка для шестизвенного робота. Это неудобно, ненаглядно даже при использовании ЭВМ.

Введем общие показатели, чтобы определить свойства привода в отдельности и в системе в целом.

КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ.

Критерий Найквиста хорош тем, что не требует сложных вычислений, поскольку при его использовании определяются не точные значения корней (это и не требуется при исследовании устойчивости), а только характер их расположения на плоскости комплексной переменной.

Кроме того, критерий – «относительный»; он основан на рассмотрении связи свойств систем в разомкнутом состоянии с их свойствами после замыкания обратными связями. Свойства систем в разомкнутом состоянии рассматриваются и обеспечиваются при их проектировании (пример – методика динамического синтеза, основанная на частотных методах). Опять же не нужно знать точные значения корней характеристических уравнений разомкнутых систем, важно только знать характер расположения корней на комплексной плоскости.

Будем решать задачу определения характера расположения корней характеристического уравнения системы:

$$\det H(p) = 0;$$

$$\det H = \det \begin{bmatrix} N & : & M_M \beta + M_C \\ \dots & \dots & \dots \\ -E & : & A^H p^2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{можно выносить множитель из } k\text{-й блочной} \\ \text{строки} \end{array} \right\} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} N & : & M_M \beta + M_C \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & : & A^H p^2 + W_M * \beta + W_C \end{bmatrix} = \det N \det(A^H p^2 + W_M \beta + W_C).$$

Напишем теперь выражение, если все приводы разомкнуты $\beta = 0$

$$\det H|_{\beta=0} = \det N \det(A^H p^2 + W_C) = \det H_p;$$

Составим отношение

$$\frac{\det H}{\det H_p} = \frac{\det(A^H p^2 + W_M + W_C)}{\det(A^H p^2 + W_C)} = \frac{\det(A^H p^2 + W_C) \det(E + A^H p^2 + W_C)^{-1} * W_M}{\det(A^H p^2 + W_C)} =$$

$$= \det(E + W_p(p));$$

$$W_p(p) = (A^H p^2 + W_C)^{-1} W_M$$

β везде = 1 $\rightarrow$ т.к. замкнутая система

$$W = (A^H p^2 + W_M \beta + W_C)^{-1} W_M;$$

$$\frac{\det H}{\det H_p} = \det(E + W_p); \quad \leftarrow \text{Возвратная разность}$$

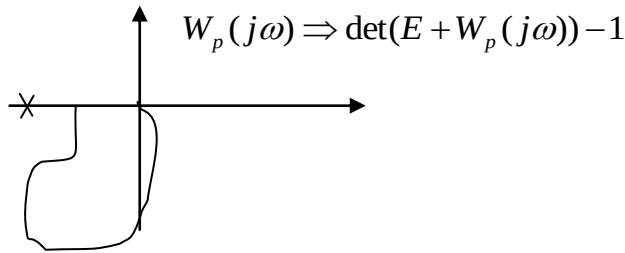
Мы помним, что если $\det H_p$ не имеет корней в правой полуплоскости и на мнимой оси, то для того, чтобы и $\det H$ обладал аналогичными свойствами, необходимо и достаточно, чтобы годограф функции Найквиста

$$\frac{\det H(j\omega)}{\det H_p(j\omega)} * Q(j\omega) - 1 = \det(E + W_p(j\omega)) - 1$$

при изменении частоты ω от 0 до ∞ не охватывал точку -1, $j0$ на плоскости комплексной переменной. В случае, если в системе есть нули на мнимой оси, критерий несколько видоизменяется, но так же как и в одномерном случае (каждый нуль дополняется четверт-дугами, полу-дугами и дугами и т.д.).

Если $n = 1$, то функция Найквиста = W_p .

Многомерная система уст. в разомкн. сост., будет уст. И в замкн. сост. если годограф функции $\det(E+W_p(j\omega))-1$ не будет охватывать точку $(-1, j_0)$.



КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ НАЙКВИСТА МНОГОМЕРНОЙ ИСУ МР

Вычислим $\det H(p)$.

Для этого выражение хар. определителя представим в следующем виде:

$$\begin{aligned} \det H(p) &= \det N(p) \det(A' * p^2 + W_M * \beta + W_C - A'_0 * p^2 + A'_0 * p^2) = \\ &= \det N \det(A'_0 * p^2 + W_C + W_\beta + (A' - A'_0) * p^2) = \\ &= \det N \det \left\{ (A'_0 * p^2 + W_M * \beta + W_C) * (E + (A'_0 * p^2 + W_M * \beta + W_C)^{-1} * (A' - A'_0) * p^2) \right\} = \\ &= \det N \det(A'_0 * p^2 + W_M * \beta + W_C)^{-1} \det(E + (A'_0 * p^2 + W_M * \beta + W_C)^{-1} * (A' - A'_0) * p^2) = \\ &= \det H_0 \det(E + W_B^{-1} * (A' - A'_0) * p^2); \end{aligned}$$

Построим функцию Найквиста как отношение за минусом единицы характеристических определителей ИСУМР с учетом и без учета взаимовлияния

$$\begin{aligned} Q(p) &= \frac{\det H(p)}{\det H_0(p)} - 1 = \det(E + (A'_0 * p^2 + W_M * \beta + W_C)^{-1} * (A' - A'_0) * p^2) = \\ &= \det(E + W_B(A^H - A_0^H)p^2) - 1. \end{aligned}$$

W_B – матричная передаточная функция ИСУ по отношению к возмущающему воздействию

$$Q(p) = \det(W(p) + E) - 1;$$

$W(p) + E$ - матрица возвратной разности;

$$\det H(p) = \det N(p) \det(A' * p^2 + W_M * \beta + W_C);$$

$\det H_0(p) = \det N(p) \det(A'_0 * p^2 + W_M * \beta + W_C)$ - характ. определитель без учета динамического влияния (комплекс отдельно взятых приводов МР).

$$A'_0 = \text{diag}(a'_{11} \quad a'_{22} \quad \dots \quad a'_{nn})$$

О свойствах системы $H_0(p)$ нам известно все, т.к. характ. определитель состоит из отдельных устойчивых приводов (устойчивость обеспечена на этапе динамического синтеза !!!).

Перейдем в частотную область.

Если теперь перейти в частотную область, то получим функцию, аналогичную функции Найквиста для систем с единичными обратными связями. Эту функцию будем называть ФН МНОГОМЕРНОЙ ИСУ МР.

$$Q(j\varpi) = \frac{\det H(j\varpi)}{\det H_0(j\varpi)} - 1 = \det(E - (A^H_0 \varpi^2 + W_M \beta + W_C)^{-1} (A^H - A^H_0) \varpi^2) = \det(E - W_B(j\varpi)(A^H - A^H_0) \varpi^2) - 1.$$

Годограф функций Найквиста $Q(j\omega)$ при $-\infty < \omega < \infty$ не должен охватывать точку $(-1, j_0)$, при этом каждый отдельный привод д.б. устойчив.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ГОДОГРАФА ФУНКЦИИ НАЙКВИСТА МНОГОМЕРНОЙ ИСУ

а) Область НЧ: $\omega \rightarrow 0$

$$Q(p) \Big|_{p=0} : \det(E + O) - 1 = 0.$$

Годограф функции Найквиста выходит из точки начала координат.

б) Область ВЧ: $\omega \rightarrow \infty$

$$Q(p) \Big|_{p=\infty} : \det(E + (A^H_0)^{-1} (A^H - A^H_0)) - 1 = \frac{\det A^H}{\det A^H_0} - 1$$

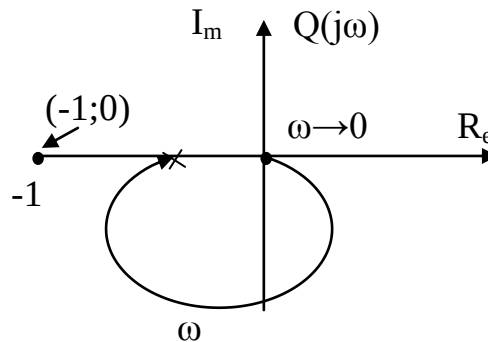
$A^H > 0$ симметрическая и положительно определенная

$$\det A^H \leq \det A^H_0 = \prod_{j=1}^n a^H_{jj};$$

$$\det A^H \neq 0 \Rightarrow \det A^H_0 \neq 0 \Rightarrow 0 \leq \pi \frac{\det A^H}{\det A^H_0} \leq 1;$$

$$-1 \leq \pi Q(\infty) \leq 0.$$

Годограф функции Найквиста ИСУ оканчивается на отрезке действительной оси между точками $0, j0$ и $-1, j0$.



Мы знаем, что годограф оканчивание годографа ФН на этом отрезке – необходимое условие устойчивости. Однако это условие не является достаточным.

Вычисление и построение ФН ИСУ – корректное действие. Однако вычисления невозможно выполнить вручную. Нужна ЭВМ. Ее и применяют на одном из заключительных этапов проектирования.

На этапе же проектирования ИСУ хорошо бы иметь более простые инженерные методы оценки эффектов взаимовлияния.

ИНЖЕНЕРНАЯ МЕТОДИКА ОЦЕНКИ ДИНАМИЧЕСКОГО ВЗАИМОВЛИЯНИЯ

Основывается на том, не является ли обратная МПФ ИСУ диагонально доминантной (ДД). Физически принцип ДД состоит в том, что если при каких – то

условиях наличием недиагональных элементов в обратной МПФ можно пренебречь или ограничить их проявление заведомо известными параметрами.

В нашем случае было бы достаточно признать матрицу $\hat{W}$ ДД, если ее недиагональные элементы не нарушают факт устойчивости ОВП, а амплитудные ЧХ ОВП с учетом динамического взаимовлияния не выйдут за границу ± 6 Дб.

Действительно, из () следует, что

Формально, проявление эффектов динамического взаимовлияния в ИСУ МР – это появление недиагональных элементов в матричной передаточной функции $W^{-1}(p)$. Очевидно, передаточные функции ОВП и СП ИСУ полностью совпадут, если $W^{-1}(p)$ – матрица диагонального вида. Естественно предположить, что существуют такие случаи, когда недиагональные элементы в точности не будут равными нулю, однако, с достаточной для практических расчетов точностью ими (недиагональными элементами) можно пренебречь. При условии, что расхождения между параметрами СП с учетом и без учета взаимовлияния будут строго лимитированы.

Ранее мы убедились в совпадении выражений обратных передаточных функций ОВП и соответствующих диагональных элементов обратных матричных передаточных функций многомерной ИСУ. Это – важный в методологическом плане аспект, позволяющий базировать расчеты многомерной ИСУ на выполненных ранее расчетах ОВП.

Условия существенного и несущественного влияния недиагональных элементов рассматривает теория многомерных динамических систем. Авторы – МакФарлейн, Розенброк, Хэррис, Валенка, Морозовский и др.

В теории многомерных систем для этих случаев были понятия диагональной доминантности (ДД) обратных матриц. По этой теории если обратная МПФ является ДД, то свойства ПФ СП могут быть установлены (оценены) без обращения обратной МПФ, а получены только из рассмотрения элементов ОМПФ.

Условия ДД рассматриваются различные, в основном, в общем виде. Мы здесь также рассмотрим эти условия и введем свои критерии ДД, пригодные для инженерной практики. Нам важно знать 2 факта:

- насколько изменится вид АЧХ и ФЧХ ОВП при выполнении условий ДД,

- сохранится ли при выполнении ДД условия устойчивости ОПВ.

Для этого запишем выражение для ОМПФ в следующем виде

$$\hat{W} = \begin{bmatrix} \hat{W}_{11} & \hat{W}_{12} & \dots & \hat{W}_{1n} \\ \hat{W}_{21} & \hat{W}_{22} & \dots & \hat{W}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hat{W}_{n1} & \hat{W}_{n2} & \dots & \hat{W}_{nn} \end{bmatrix} = \text{diag}(\hat{W}_{11} \quad \hat{W}_{22} \quad \dots \quad \hat{W}_{nn}) * \begin{bmatrix} 1 & \frac{\hat{W}_{12}}{\hat{W}_{11}} & \dots & \frac{\hat{W}_{1n}}{\hat{W}_{11}} \\ \frac{\hat{W}_{21}}{\hat{W}_{22}} & 1 & \dots & \frac{\hat{W}_{2n}}{\hat{W}_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\hat{W}_{n1}}{\hat{W}_{nn}} & \frac{\hat{W}_{n2}}{\hat{W}_{nn}} & \dots & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \hat{W}_0 Z.$$

В этой матрице $\hat{W}_{jj}$ - обратная передаточная функция j-го ОВП. $\hat{W}_0$ - матрица диагонального вида, составленная из обратных передаточных функций ОВП.

Z – матрица, составленная из соотношений недиагональных и диагональных элементов ОМПФ ИСУ.

Запишем выражение для МПФ ИСУ в прямом виде.

$$W(p) = Z^{-1}(p)W_0(p) = \hat{Z}(p)W_0(p).$$

Диагональный элемент обратной матриц. п.ф. – обр. матриц. п.ф. привода.

Матрица из обр. матриц. п.ф. отдельных приводов - $\hat{W}_0$ (без взаимовлияния).

Из последнего выражения следует связь между ПФ приводов с учетом и без учета взаимовлияния:

$$W_{ii} = \hat{Z}_{ii} * W_i;$$

$\hat{Z}_{ii}$ - диагональный элемент матрицы Z^{-1} .

$$\hat{Z}_{jj} = \frac{\text{adj}_{jj} Z}{\det Z}.$$

$\hat{Z}_{jj}$ - зависит от соотношения недиагональных и диагональных элементов матрицы Z . Эти соотношения зависят от многих факторов. В методике, которая изложена ниже, эти соотношения рассматриваются в виде модулей ЧХ, соответствующих этим соотношениям.

Перейдем в частотную область. Выберем среди всех $Z_{ij}(j\omega)$ наибольшие по модулю и обозначим их ε , то есть

$$\max_{i, j, \omega} \left| \frac{\hat{W}_{ij}(j\omega)}{\hat{W}_{ii}(j\omega)} \right| = \varepsilon;$$

Заменим в матрице $Z(j\omega)$ все недиагональные элементы на ε . Эту матрицу обозначим Z^* .

Матрицу Z^* можно нарисовать на доске.

Тогда диагональные элементы обратной матрицы

$$\hat{Z}_{ii}^* = \frac{\text{adj}_{ii} Z^*}{\det Z^*} = \frac{\text{полином степени } (n-1) \text{ от } \varepsilon}{\text{полином степени } n \text{ от } \varepsilon}$$

$Z^* = Z$, где все элементы $Z_{ij} = \varepsilon$.

Рассмотрим случаи:

$\max \hat{Z}_{ii}^*$ (все слагаемые полинома числителя со знаком «+», а знаменателя - со знаком «-») и $\min \hat{Z}_{ii}^*$ (все слагаемые полинома числителя со знаком «-», в знаменателе со знаком «+»).

Полиномы числителя и знаменателя рассматриваются только в области положительных значений (!).

Тогда, поскольку

$$W_{jj}(j\omega) = \hat{Z}_{jj}^* * W_j(j\omega);$$

$$\min \hat{Z}_{jj}^* |W_j(j\omega)| < |W_{jj}(j\omega)| < \max \hat{Z}_{jj}^* |W_j(j\omega)|.$$

$$// W_{ii}^{-1}(j\omega) = \hat{Z}_{ii}^{*-1} * W_i^{-1}(j\omega).$$

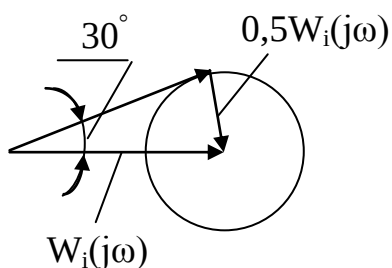
Будем рассматривать значения $\hat{Z}_{jj}^*$ в диапазоне от 0.5 до 1.5.

$$(20\lg(0.5) = -6 \text{ Дб})$$

$$(20\lg(1.5) = +3.5 \text{ Дб})$$

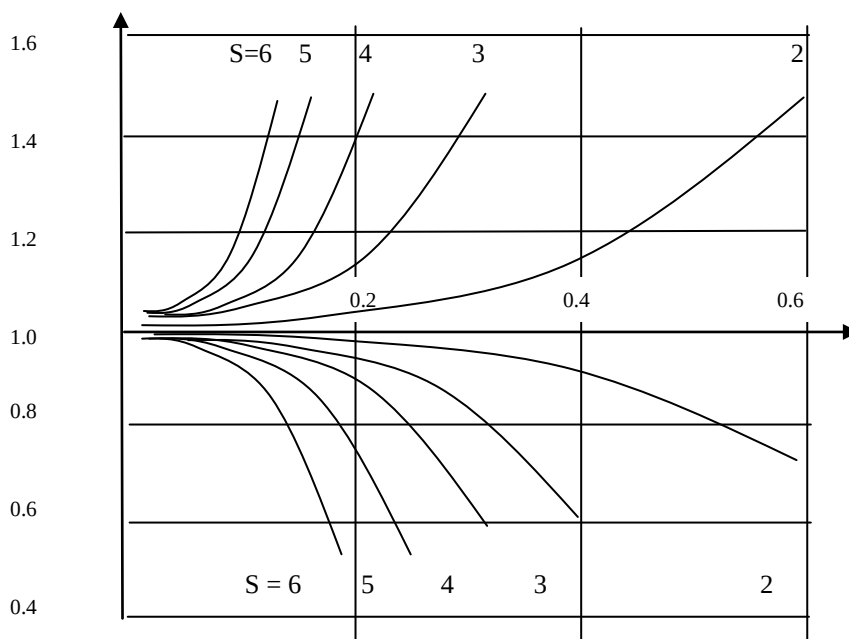
Тогда модуль $|W_{jj}(j\omega)|$ не выйдет за значения $|W_j(j\omega)|$ плюс минус $0.5|W_j(j\omega)|$.

В этом случае максимальная погрешность расчета фазы не выйдет за пределы $\pm 30^\circ$.



Эта точность приемлема для технических расчетов.

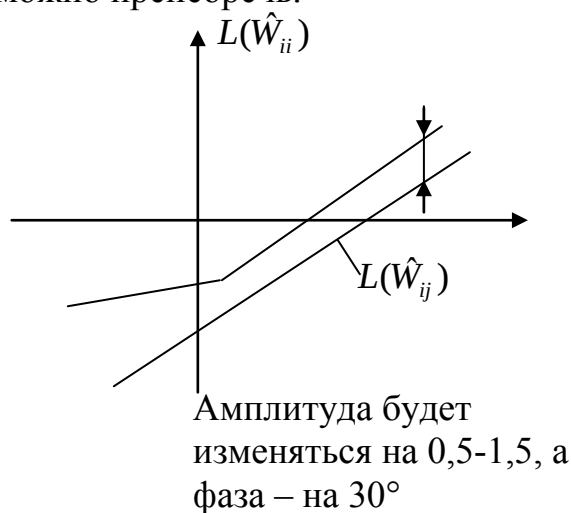
Для функций $\hat{Z}_{jj}^* = F(\epsilon)$ построены графики. Они имеют вид



Применение этих графиков требует вычисления разности ЛАЧХ $\frac{\hat{W}_{ij}}{\hat{W}_{ii}}$. Это удобно сделать графически, как показано на рисунке ниже.

Практически вычисления сводятся к поиску (с использованием обратных ЛАЧХ МПФ) точек наибольшего приближения обратных ЛАЧХ перекрестных

связей к обратным ЛАЧХ соответствующих ОВП. Типовое расположение обратных ЛАЧХ дано на рис. Видно, что ДАЧХ сближаются только начиная с некоторой ВЧ области. Поэтому та область, которая ранее определялась как $\omega > 0$ теперь – левее точки наибольшего сближения. Кроме того, если ЛАЧХ сближаются на расстояние, большее, чем показывают графики функции ε , взаимовлиянием (с точки зрения искажения ЛАЧХ в установленных нами пределах) можно пренебречь.



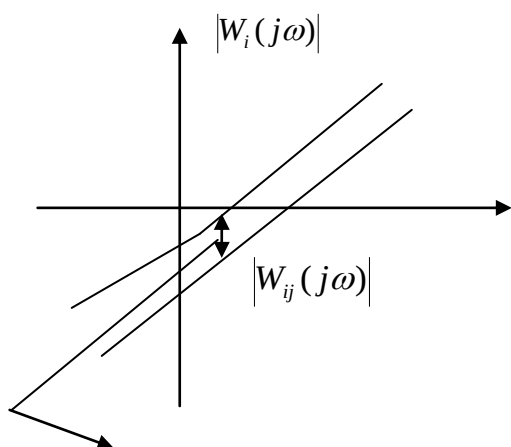
Если характеристики сближаются не больше чем на $20Lg(\varepsilon)$ то произойдут такие искажения. В частности, для $S=2$ это расстояние не должно быть меньше $20Lg(0.6) = -4$ Дб.

Если меньше чем на 20 дБ(0,6) – динамическое взаимовлияние будет существенным ($S=2$).

Для большего количества приводов накладываются другие ограничения.

Для $S=4$ - $20Lg(0.2) = -14$ Дб.

рисунок (*) с исправлением.



Если не приблизилось больше чем на ε соответ. количеству приводов $\Rightarrow$ смещение характеристики не более чем на 6 дБ по амплитуде и 30° по фазе.

ОЦЕНКА ВЫПОЛНЕНИЯ УСЛОВИЙ УСТОЙЧИВОСТИ МНОГОМЕРНОЙ ИСУ МР.

Воспользуемся

$$Q(p) = \det(E + (A^H_0 p^2 + W_M \beta + W_C)^{-1} * (A^H - A^H_0) * p^2) - 1 = \det\{(A^H_0 p^2 + W_M \beta + W_C)^{-1} * ((A^H_0 p^2 + W_M \beta + W_C + A^H p^2 - A^H_0 p^2))\} - 1 = \det\{ \underbrace{(A^H_0 p^2 + W_M \beta + W_C)^{-1}}_{W_0} * \underbrace{(A^H p^2 - A^H_0 p^2)}_{W^{-1}} \} - 1;$$

$$Q(p) = \det(W_0 * W^{-1}) - 1;$$

$$Q(p) = \det(W_0 * W^{-1}) - 1 = \det(W_0 (Z^{-1} * W_0)^{-1}) - 1 = \det Z - 1;$$

Поскольку выше мы ограничились оценкой только положительных (и ненулевых) значений определителя, то

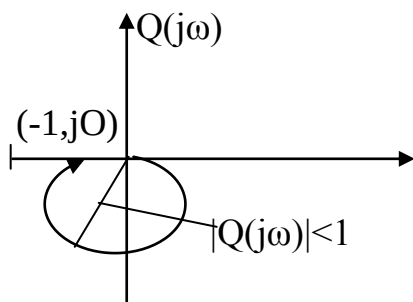
$$\max |Q(j\omega)| = |\det Z(j\omega) - 1| \leq (0 < (1 + k_{n2} * \varepsilon^2 + k_{n3} * \varepsilon^3 + \dots + k_{nn} * \varepsilon^n)) - 1 = k_{n2} * \varepsilon^2 + k_{n3} * \varepsilon^3 + \dots + k_{nn} * \varepsilon^n$$

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \dots & \varepsilon \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varepsilon & \varepsilon & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Будем рассматривать определитель только в пределах от 0,5 до 1,5, где мы допустили искажения.

n	2	3	4
$\max Q(j\omega)$	0,36	0,61	0,77

Если $|Q(j\omega)| \neq 1 \Rightarrow$ годограф никогда не охватит точку $(-1, j0)$



Обеспечивается удовлетворение достаточного условия устойчивости.

АНАЛИЗ ФАКТОРОВ, ВЛИЯЮЩИХ НА УВЕЛИЧЕНИЕ И
УМЕНЬШЕНИЕ ДИНМИЧЕСКОГО ВЗАИМОВЛИЯНИЯ С
ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ОБРАТНЫХ ЛАЧХ.